

NOM :	Prénom :	Classe :
Appréciation :		Note :

EXERCICE 1 - QCM**5 points**

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Une réponse correcte rapporte 1 point, sinon rien.

- Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$. On veut démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 1$. L'étape d'hérédité consiste à démontrer que :
 - $u_0 = 2^0 + 1$
 - $u_k = 2^k + 1$
 - $u_{k+1} = 2^{k+1} + 1$
 - $u_{k+1} = 2u_k - 1$
- Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les vecteurs $\vec{u}(1; -2; 3)$ et $\vec{v}(2; 1; 0)$. Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égal à :
 - 0
 - 4
 - 4
 - $\sqrt{14} \times \sqrt{5}$
- L'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \ln(2x - 4)$ est :
 - \mathbb{R}
 - $]0; +\infty[$
 - $]2; +\infty[$
 - $] -\infty; 2[$
- Un plan P passe par $A(1; 0; -1)$ et admet $\vec{n}(2; -1; 3)$ comme vecteur normal. Une équation de P est :
 - $2x - y + 3z + 1 = 0$
 - $2x - y + 3z - 1 = 0$
 - $x - z = 0$
 - $2x + y + 3z - 5 = 0$
- La limite de la fonction $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ en $+\infty$ est :
 - $+\infty$
 - 1
 - 0
 - Elle n'existe pas
- Sur $]0; +\infty[$, la dérivée de la fonction $g(x) = x \ln(x) - x$ est :
 - $g'(x) = \frac{1}{x} - 1$
 - $g'(x) = \ln(x)$
 - $g'(x) = \ln(x) + 1$
 - $g'(x) = 1$

7. Les plans $P_1 : x + 2y - z + 4 = 0$ et $P_2 : 2x + 4y - 2z + 1 = 0$ sont :
- Strictement parallèles
 - Confondus
 - Sécants et perpendiculaires
 - Sécants et non perpendiculaires
8. L'expression $\ln(e^3) + \ln\left(\frac{1}{e}\right)$ est égale à :
- 4
 - 3
 - 2
 - e^2
9. La distance entre les points $A(2; 1; 1)$ et $B(3; 0; 2)$ est :
- 1
 - $\sqrt{3}$
 - 3
 - $\sqrt{14}$
10. On considère la propriété $P(n) : 2^n > n^2$. Pour quel entier n est-elle vérifiée pour la première fois?
- $n = 0$
 - $n = 2$
 - $n = 4$
 - $n = 5$

EXERCICE 2**5 points**

L'espace est rapporté à un repère orthonormé où l'on considère :

- les points $A(2; -1; 0)$, $B(1; 0; -3)$, $C(6; 6; 1)$ et $E(1; 2; 4)$;
 - le plan P d'équation cartésienne $2x - y - z + 4 = 0$.
- Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A .
 - Calculer le produit scalaire $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ puis les longueurs BA et BC .
 - En déduire la mesure en degrés de l'angle \widehat{ABC} arrondie au degré.
 - Démontrer que le plan P est parallèle au plan (ABC) .
 - En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
 - Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ orthogonale au plan (ABC) et passant par le point E .
 - Démontrer que le projeté orthogonal H du point E sur le plan (ABC) a pour coordonnées $\left(4; \frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$.
 - On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par $V = \frac{1}{3}B \times h$ où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur de la pyramide associée à cette base.
Calculer l'aire du triangle ABC puis démontrer que le volume de la pyramide $ABCE$ est égal à 16,5 unités de volume.

EXERCICE 3**6 points****Partie A**

Soit u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = x^2 - 2 + \ln(x)$.

1. Étudier les variations de u sur $]0; +\infty[$ et préciser ses limites en 0 et en $+\infty$.
2.
 - a. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0; +\infty[$. On note α cette solution.
 - b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .
3. Déterminer le signe de $u(x)$ suivant les valeurs de x .
4. Montrer l'égalité $\ln(\alpha) = 2 - \alpha^2$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + (2 - \ln(x))^2$.

On note f' la fonction dérivée de f sur $]0; +\infty[$.

1. Exprimer, pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x)$ en fonction de $u(x)$.
2. En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.

Partie C

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on note :

- Γ la courbe représentative de la fonction \ln ;
 - A le point de coordonnées $(0; 2)$;
 - M le point de Γ d'abscisse x appartenant à $]0; +\infty[$.
1. Montrer que la distance AM est donnée par $AM = \sqrt{f(x)}$.
 2. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
 - a. Montrer que les fonctions f et g ont les mêmes variations sur $]0; +\infty[$.
 - b. Montrer que la distance AM est minimale en un point de Γ , noté P , dont on précisera les coordonnées.
 - c. Montrer que $AP = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.
 3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La droite (AP) est-elle perpendiculaire à la tangente à Γ en P ?

EXERCICE 4**4 points**

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 40 \\ u_{n+1} & = & 0,008u_n(200 - u_n) \end{cases}$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021 + n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 100]$ par $f(x) = 0,008x(200 - x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0; 100]$ l'équation $f(x) = x$.
3.
 - a. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 100]$ et dresser son tableau de variations.
 - b. En remarquant que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100.$$

- c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - d. Résoudre $f(\ell) = \ell$. En déduire la limite ℓ de la suite (u_n) . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On considère l'algorithme suivant :

```
def seuil(p) :  
    n=0  
    u = 40  
    while u < p :  
        n =n+1  
        u = 0.008*u*(200-u)  
    return(n+2021)
```

L'exécution de `seuil(100)` ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3.