EXERCICE 1 - QCM **5 points**

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Une réponse correcte rapporte 0.5 point, sinon rien.

1. **Réponse : c.** L'hérédité consiste à supposer la propriété vraie au rang k ($u_k = 2^k + 1$) pour la démontrer au rang $k+1$ ($u_{k+1} = 2^{k+1} + 1$).
2. **Réponse : a.** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 2 + (-2) \times 1 + 3 \times 0 = 2 - 2 + 0 = 0$.
3. **Réponse : c.** f est définie si $2x - 4 > 0 \iff 2x > 4 \iff x > 2$. Donc $D_f =]2;+\infty[$.
4. **Réponse : a.** L'équation est de la forme $2(x-1) - 1(y-0) + 3(z+1) = 0 \iff 2x - 2 - y + 3z + 3 = 0 \iff 2x - y + 3z + 1 = 0$.
5. **Réponse : c.** C'est une limite usuelle : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.
6. **Réponse : b.** $g'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$.
7. **Réponse : a.** Les coefficients sont proportionnels ($(2;4;-2) = 2 \times (1;2;-1)$) mais les constantes ne le sont pas ($1 \neq 2 \times 4$). Ils sont donc strictement parallèles.
8. **Réponse : c.** $\ln(e^3) + \ln\left(\frac{1}{e}\right) = 3 + \ln(e^{-1}) = 3 - 1 = 2$.
9. **Réponse : b.** $AB = \sqrt{(3-2)^2 + (0-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.
10. **Réponse : d.** $2^0 > 0^2 \iff 1 > 0$ vrai ; $2^1 > 1^2 \iff 2 > 1$ vrai ; $2^2 > 2^2 \iff 4 > 4$ faux ; $2^3 > 3^2 \iff 8 > 9$ faux ; $2^4 > 4^2 \iff 16 > 16$ faux ; $2^5 > 5^2 \iff 32 > 25$ vrai. Elle est vraie pour $n = 0, 1$ puis redevient vraie à partir de $n = 5$.

EXERCICE 2 **5 points**

1. **a.** $\overrightarrow{AB} = (1-2;0-(-1);-3-0) = (-1;1;-3)$
$\overrightarrow{AC} = (6-2;6-(-1);1-0) = (4;7;1)$
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (-1)\times 4 + 1\times 7 + (-3)\times 1 = -4+7-3 = 0.$
Le triangle ABC est donc rectangle en A.

b. $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = (1;-1;3)$ et $\overrightarrow{BC} = (6-1;6-0;1-(-3)) = (5;6;4)$.
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 1\times 5 + (-1)\times 6 + 3\times 4 = 5-6+12 = 11.$
$BA = \|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{1^2+(-1)^2+3^2} = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}.$
$BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{5^2+6^2+4^2} = \sqrt{25+36+16} = \sqrt{77}.$

c. $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{BA\times BC} = \dfrac{11}{\sqrt{11}\times\sqrt{77}} = \dfrac{11}{\sqrt{11\times 77}} = \dfrac{11}{\sqrt{11\times 11\times 7}} = \dfrac{11}{11\sqrt{7}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}.$
$\widehat{ABC} = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \approx 68°.$

2. **a.** Un vecteur normal à P est $\vec{n}(2;-1;-1)$.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1\times 1-(-3)\times 7 \\ (-3)\times 4-(-1)\times 1 \\ (-1)\times 7 - 1\times 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+21 \\ -12+1 \\ -7-4\end{pmatrix} = (22;-11;-11) = 11(2;-1;-1).$$

$\vec{n}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ donc orthogonal au plan (ABC). P et (ABC) ayant le même vecteur normal sont parallèles.

b. (ABC) passant par $A(2;-1;0)$ admet une équation de la forme $2x-y-z+d=0$.
$2\times 2-(-1)-0+d=0 \iff 4+1+d=0 \iff d=-5.$
Donc $(ABC): 2x-y-z-5=0$.

c. Δ est orthogonale à (ABC) donc admet $\vec{n}(2;-1;-1)$ comme vecteur directeur. Elle passe par $E(1;2;4)$.
Représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \\ z = 4-t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

d. Vérifions que $H(4;\frac{1}{2};\frac{5}{2})$ soit le projeté orthogonal de E sur (ABC), cad que $H\in(ABC)$ et $H\in\Delta$.
On remplace les coordonnées paramétriques de Δ dans l'équation de (ABC) : $2(1+2t)-(2-t)-(4-t)-5=0 \iff 2+4t-2+t-4+t-5=0 \iff (4t+t+t)+(2-2-4-5)=0 \iff 6t-9=0 \iff t=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$.
Alors $x_H = 1+2\times\frac{3}{2} = 1+3 = 4$, $y_H = 2-\frac{3}{2} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$, $z_H = 4-\frac{3}{2} = \frac{8-3}{2} = \frac{5}{2}$.
$H(4;\frac{1}{2};\frac{5}{2})$ est bien le projeté orthogonal de E sur (ABC).

3. $B = \mathscr{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\times AB\times AC = \frac{1}{2}\times\sqrt{11}\times\sqrt{4^2+7^2+1^2} = \frac{1}{2}\times\sqrt{11}\times\sqrt{66} = \frac{1}{2}\sqrt{726}.$
$\sqrt{726} = \sqrt{121\times 6} = 11\sqrt{6}$, donc $B = \frac{11\sqrt{6}}{2}$.
$h = EH = \|\overrightarrow{EH}\| = \sqrt{(4-1)^2+(\frac{1}{2}-2)^2+(\frac{5}{2}-4)^2} = \sqrt{3^2+(-\frac{3}{2})^2+(-\frac{3}{2})^2} = \sqrt{9+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{9+\frac{18}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}+\frac{18}{4}} = \sqrt{\frac{54}{4}} = \frac{\sqrt{54}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$
$V = \frac{1}{3}\times\frac{11\sqrt{6}}{2}\times\frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{3}\times\frac{11\sqrt{6}\times 3\sqrt{6}}{4} = \frac{1}{3}\times\frac{11\times 3\times 6}{4} = \frac{11\times 6}{4} = \frac{66}{4} = 16,5.$
Le volume est bien de 16,5 unités de volume.

EXERCICE 3 **6 points**

Partie A

$u(x) = x^2 - 2 + \ln(x)$ sur $]0;+\infty[$.

1. $u'(x) = 2x + \frac{1}{x}$. Sur $]0;+\infty[$, $2x > 0$ et $\frac{1}{x} > 0$ donc $u'(x) > 0$. u est strictement croissante.
   $\lim_{x\to 0^+} u(x) = 0 - 2 + (-\infty) = -\infty$. $\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty - 2 + (+\infty) = +\infty$.
2. **a.** u est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0;+\infty[$. $\lim_{x\to 0^+} u(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$. $0 \in]-\infty;+\infty[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (corollaire), l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0;+\infty[$.
   b. $u(1) = 1 - 2 + 0 = -1 < 0$. $u(2) = 4 - 2 + \ln 2 \approx 2 + 0,69 = 2,69 > 0$. Donc $\alpha \in]1;2[$.
   $u(1,5) = 2,25 - 2 + \ln 1,5 \approx 0,25 + 0,405 = 0,655 > 0$ donc $\alpha \in]1;1,5[$.
   $u(1,3) = 1,69 - 2 + \ln 1,3 \approx -0,31 + 0,262 = -0,048 < 0$.
   $u(1,31) = 1,7161 - 2 + \ln 1,31 \approx -0,2839 + 0,2700 = -0,0139 < 0$.
   $u(1,32) = 1,7424 - 2 + \ln 1,32 \approx -0,2576 + 0,2776 = 0,02 > 0$.
   Donc $1,31 < \alpha < 1,32$. (Amplitude 10^{-2}).
3. u étant croissante, $u(x) < 0$ sur $]0;\alpha[$, $u(\alpha) = 0$, $u(x) > 0$ sur $]\alpha;+\infty[$.
4. $u(\alpha) = 0 \iff \alpha^2 - 2 + \ln(\alpha) = 0 \iff \ln(\alpha) = 2 - \alpha^2$.

Partie B

$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$.

1. $f'(x) = 2x + 2(2 - \ln x) \times \left(-\frac{1}{x}\right) = 2x - \frac{2(2-\ln x)}{x} = \frac{2x^2-4+2\ln x}{x} = \frac{2(x^2-2+\ln x)}{x} = \frac{2u(x)}{x}$.
2. Sur $]0;+\infty[$, $x > 0$ et $2 > 0$. Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $u(x)$.
   D'après A.3, $u(x) < 0$ sur $]0;\alpha[$ donc f décroît, $u(x) > 0$ sur $]\alpha;+\infty[$ donc f croît. Minimum en $x = \alpha$.

Partie C

1. $A(0;2)$, $M(x;\ln x)$. $AM^2 = (x-0)^2 + (\ln x - 2)^2 = x^2 + (\ln x - 2)^2 = x^2 + (2 - \ln x)^2 = f(x)$. Donc $AM = \sqrt{f(x)}$ (car distance positive).
2. Soit $g(x) = \sqrt{f(x)}$.
   a. g est la composée de la fonction racine carrée, strictement croissante sur $[0;+\infty[$, et de f. f étant positive, g a les mêmes variations que f.
   b. D'après B.2, f admet un minimum en $x = \alpha$. Donc g aussi. La distance AM est minimale au point P d'abscisse α. Ses coordonnées sont $P(\alpha;\ln\alpha)$.
   c. $AP = g(\alpha) = \sqrt{f(\alpha)} = \sqrt{\alpha^2 + (2 - \ln\alpha)^2}$. Or $2 - \ln\alpha = 2 - (2 - \alpha^2) = \alpha^2$ d'après A.4. Donc $AP = \sqrt{\alpha^2 + (\alpha^2)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4} = \sqrt{\alpha^2(1 + \alpha^2)} = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$.
3. La tangente à Γ (courbe de ln) en P a pour coefficient directeur $\frac{1}{\alpha}$. Le coefficient directeur de la droite (AP) est $\frac{\ln\alpha - 2}{\alpha - 0} = \frac{-(2-\ln\alpha)}{\alpha} = -\frac{\alpha^2}{\alpha} = -\alpha$.
   Le produit des coefficients directeurs est $-\alpha \times \frac{1}{\alpha} = -1$. Les deux droites sont donc perpendiculaires.

EXERCICE 4 **4 points**

1. $u_1 = 0,008 \times 40 \times (200 - 40) = 0,008 \times 40 \times 160 = 0,008 \times 6400 = 51,2$. Soit environ 51 individus.
2. $f(x) = 0,008x(200 - x) = 1,6x - 0,008x^2$. $f(x) = x \iff 1,6x - 0,008x^2 = x \iff 0,6x - 0,008x^2 = 0 \iff x(0,6 - 0,008x) = 0$.
   Donc $x = 0$ ou $0,008x = 0,6 \iff x = \frac{0,6}{0,008} = 75$. Les solutions dans $[0;100]$ sont 0 et 75.
3. **a.** f est un trinôme du second degré : $f(x) = -0,008x^2 + 1,6x$. $f'(x) = -0,016x + 1,6$. $f'(x) = 0 \iff x = 100$. $f'(x) \geq 0 \iff x \leq 100$. Donc f est croissante sur $[0;100]$.
   $f(0) = 0$, $f(100) = 0,008 \times 100 \times 100 = 80$. Tableau de variations : de 0 à 80.

   b. Montrons par récurrence $P_n : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$.
   Initialisation : $u_0 = 40$, $u_1 = 51,2$. $0 \leq 40 \leq 51,2 \leq 100$ est vrai.
   Hérédité : Supposons P_k vraie. $u_{k+1} = f(u_k)$ et $u_{k+2} = f(u_{k+1})$. Comme f est croissante sur $[0;100]$, $u_k \leq u_{k+1} \implies f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \implies u_{k+1} \leq u_{k+2}$. De plus, $u_k \geq 0 \implies f(u_k) \geq f(0) = 0$ et $u_{k+1} \leq 100 \implies f(u_{k+1}) \leq f(100) = 80 \leq 100$. Donc $0 \leq u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 100$. P_{k+1} est vraie.
   Conclusion : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$ pour tout n.

   c. La suite (u_n) est croissante et majorée par 100, donc elle converge vers une limite $\ell \in [0;100]$.

   d. La fonction f étant continue, la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. D'après la question 2, $\ell = 0$ ou $\ell = 75$. Comme $u_0 = 40$ et la suite est croissante, la limite est $\ell = 75$. Interprétation : La colonie d'oiseaux tend vers une population stable de 75 individus.
4. La condition de la boucle `while` est $u < p$. Pour $p = 100$, on cherche $u_n < 100$. Or, d'après 3.b, la suite est majorée par 100, et d'après 3.d elle converge vers 75 sans jamais dépasser 100 (elle est majorée par 100, mais atteint-elle 100 ? Non, car la limite est 75). La condition $u < 100$ reste donc toujours vraie. La boucle `while` ne s'arrête jamais, l'algorithme tourne indéfiniment et ne renvoie aucune valeur.