EXERCICE 1 **4 points**

Calculer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-5x+1}{3-x}$;
   Corrigé :
   En $-\infty$, on a une forme indéterminée $\frac{+\infty}{+\infty}$.
   En $-\infty$, on factorise par le terme de plus haut degré :
   $$\frac{4x^2-5x+1}{3-x} = \frac{x^2\left(4-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(\frac{3}{x}-1\right)} = x \times \frac{4-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x}-1}$$
   Quand $x\to-\infty$:
   $$x\to-\infty, \quad \frac{4-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x}-1} \to \frac{4-0+0}{0-1} = -4$$
   Donc, par produit, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-5x+1}{3-x} = +\infty$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-x}}$;
   Corrigé :
   Quand $x\to+\infty$, $e^{-x}\to 0$, donc :
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+0} = 1$$
3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sin\left(\frac{\pi x^3-5x+1}{7-2x^3}\right)$;
   Corrigé :
   On cherche d'abord la limite de l'expression à l'intérieur du sinus, on alors pour $x\to-\infty$:
   $$\frac{\pi x^3-5x+1}{7-2x^3} = \frac{x^3\left(\pi-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{7}{x^3}-2\right)} = \frac{\pi-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{7}{x^3}-2}$$
   Quand $x\to-\infty$:
   $$\frac{\pi-0+0}{0-2} = -\frac{\pi}{2}$$
   Donc :
   $$\lim_{x\to-\infty} \sin\left(\frac{\pi x^3-5x+1}{7-2x^3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$
4. $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{5}{-x^2+\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$;
   Corrigé :
   Quand $x\to0^+$, $\frac{1}{x}\to+\infty$. La fonction $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ oscille entre -1 et 1 sans limite.
   $-1 \leq cos(x^{-1}) \leq 1$
   $-x^2-1 \leq -x^2+cos(x^{-1}) \leq -x^2+1$
   $(-x^2-1)^{-1} \geq (-x^2+cos(x^{-1}))^{-1} \geq (-x^2+1)^{-1}$
   $5(-x^2-1)^{-1} \geq 5(-x^2+cos(x^{-1}))^{-1} \geq 5(-x^2+1)^{-1}$
   Or $\displaystyle\lim_{x\to0^+} 5(-x^2+1)^{-1} = \frac{5}{-0+1} = 5$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^+} 5(-x^2-1)^{-1} = \frac{5}{-0-1} = -5$.
   Les limites étant différentes, nous ne pouvons pas déterminer la limite.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit f une fonction tel que : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2-4}$.

1. Déterminer D_f le domaine de définition de f.
   Corrigé :
   f est définie lorsque $x^2-4 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 2$ et $x \neq -2$.
   Donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$.
2. Étudier les limites de f aux bornes de D_f.
   Corrigé :

   - $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin(x)}{x^2-4}$
     $|\sin(x)| \leq 1$ et $x^2-4 \sim x^2 \to +\infty$, donc par encadrement :
     $$-\frac{1}{x^2-4} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2-4}$$
     Les deux bornes tendent vers 0, donc d'après le théorème d'encadrement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
   - $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ par le même raisonnement.
   - $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$:
     $\sin(-2) \approx -0.9093$ (constant), $x^2-4 \to 0^-$, donc :
     $$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \frac{\sin(-2)}{0^-} = +\infty$$
   - $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \dfrac{\sin(-2)}{0^+} = -\infty$
   - $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \dfrac{\sin(2)}{0^-} = -\infty$ ($\sin(2) \approx 0.9093 > 0$)
   - $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \dfrac{\sin(2)}{0^+} = +\infty$

EXERCICE 3 — 8 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Préciser les limites de la fonction f aux bornes de $]0;+\infty[$.
Corrigé :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ car $e^x \to 1$ et $\frac{1}{x} \to +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (croissance comparée).

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$.
Corrigé :
$f(x) = \dfrac{e^x}{x} = e^x \times \dfrac{1}{x}$. Donc :

$$f'(x) = e^x \times \frac{1}{x} + e^x \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.
Corrigé :
$f'(x)$ est du signe de $(x-1)$ car $e^x > 0$ et $x^2 > 0$ sur $]0,+\infty[$:

- $f'(x) < 0$ sur $]0,1[$
- $f'(x) = 0$ en $x = 1$
- $f'(x) > 0$ sur $]1,+\infty[$

Tableau de variations :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	e	$\nearrow$ $+\infty$

Avec $f(1) = \dfrac{e^1}{1} = e$.

4. Montrer qu'il existe une unique solution $\alpha \in]0;2[$ à l'équation $f(x) = 5$.
Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.
Corrigé :

- f est continue et strictement décroissante sur $]0,1]$, avec $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ et $f(1) = e \approx 2.718$.
  D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique solution $\alpha \in]0;1]$ à $f(x) = 5$.
- f est continue et strictement croissante sur $[1,2]$, avec $f(1) = e$ et $f(2) = \dfrac{e^2}{2} < 5$. Alors $f(x) = 5$ n'a pas de solution sur $[1;2]$.

Pour conclure, sur $]0;2]$, $f(x) = 5$ n'a qu'une seule solution qui est α. $0,25 < \alpha < 0,26$.

5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.
On note A un éventuel point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

a. Montrer que a est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1)+x^2=0$.

Corrigé :
La tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est parallèle à Δ si et seulement si $f'(a) = -1$ (coefficient directeur de Δ).
Or $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$. Donc :

$$\frac{e^a(a-1)}{a^2} = -1 \iff e^a(a-1) = -a^2 \iff e^a(a-1)+a^2 = 0$$

On note g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x(x-1)+x^2$.
On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

b. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0\,;\,+\infty[$.

Corrigé :

$$g'(x) = e^x(x-1)+e^x(1)+2x = e^x(x-1+1)+2x = xe^x+2x = x(e^x+2)$$

Sur $[0,+\infty[$:

- $g'(x) = 0$ pour $x = 0$
- $g'(x) > 0$ pour $x > 0$ (car $x > 0$ et $e^x+2 > 0$)

Tableau de variations :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	-1 $\nearrow$ $+\infty$

Avec $g(0) = e^0(0-1)+0^2 = 1\times(-1) = -1$.

c. Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

Corrigé :
Le coefficient directeur de Δ est -1 alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ a également comme coefficient directeur -1, on a alors :
$f'(a) = -1 \iff \dfrac{e^a(a-1)}{a^2} = -1 \iff e^a(a-1)+a^2 = 0 \iff g(a) = 0$.
On cherche $a > 0$ tel que $g(a) = 0$.

- g est continue sur $[0,+\infty[$
- $g(0) = -1 < 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ (car $e^x(x-1)\to+\infty$ et $x^2\to+\infty$)
- g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $a \in]0,+\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
Donc il existe un unique point A d'abscisse a en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à Δ.