

Chapitre 11. Primitive et Équation Différentielle

Boulangier Yann

23 août 2025

Table des matières

1	Primitive	2
1.1	Définition	2
1.2	Calculs de Primitives	3
1.2.1	Primitives des fonctions de référence	3
1.2.2	Fonctions composées	3
1.2.3	Exemples 3	4
2	Équation Différentielle	5
2.1	Définitions	5
2.2	Équation Différentielle linéaire d'ordre 1	6
2.2.1	Équation différentielle $y' = ay$	6
2.2.2	Équation différentielle $y' = ay + f$	6

1 Primitive

1.1 Définition

Définition 1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I quelconque.

On dit que $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une **primitive** de f sur I si F est une fonction dérivable sur I vérifiant $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Remarque 1

Deux fonctions différentes peuvent avoir la même dérivée, de facto une primitive d'une fonction n'est pas unique. Pour l'être, une condition initiale est nécessaire.

Propriété 1

Soient f une fonction continue sur I et F une fonction définie et dérivable sur I , si pour tout $x \in I$ on a $F'(x) = f(x)$, alors F est une primitive de f sur I .

Exemple 1

Soient $f(x) = 2x$ et $F(x) = x^2 + 5$. On a $F'(x) = 2x + 0 = 2x = f(x)$, donc F est une primitive de f .

Proposition 1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui admet une primitive $F_0 : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors, les primitives de f sur I sont toutes de la forme $x \rightarrow F_0(x) + k, k \in \mathbb{R}$.

Si la fonction f est à valeurs réelles, les primitives (à valeurs réelles) sont définies à une constante réelle près.

Proposition 2

Soient F une primitive de f et G une primitive de g .

Alors on a :

- $F + G$ est une primitive de $f + g$;
- pour $\lambda \in \mathbb{R}$, λF est une primitive de λf

Exemple 2

L'ensemble des primitives réelles de $f : x \rightarrow x^3 - 1$ est $\{x \rightarrow \frac{x^4}{4} - x + k, k \in \mathbb{R}\}$.

1.2 Calculs de Primitives

1.2.1 Primitives des fonctions de référence

$f(x)$	$F(x)$	I
m (constante)	$mx + k$	\mathbb{R}
x	$\frac{x^2}{2} + k$	\mathbb{R}
$x^n, n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\begin{cases}]-\infty, 0[\text{ ou }]0, +\infty[& \text{si } n \leq -2, \\ \mathbb{R} & \text{sinon} \end{cases}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$	$] -\infty, 0[\text{ ou }]0, +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$]0, +\infty[$
$\cos(x)$	$\sin(x) + k$	\mathbb{R}
$\sin(x)$	$-\cos(x) + k$	\mathbb{R}
e^x	$e^x + k$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$	$]0, +\infty[$

1.2.2 Fonctions composées

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

$f(x)$	$F(x)$	Conditions
$u'(x)u(x)^n, n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$	$\frac{u(x)^{n+1}}{n+1} + k$	$\begin{cases} u(x) \neq 0 & \text{si } n \leq -2 \end{cases}$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + k$	$u(x) > 0$ sur I
$\frac{u'(x)}{u(x)^2}$	$-\frac{1}{u(x)} + k$	$u(x) \neq 0$ sur I
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k$	aucune
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u(x)) + k$	$u(x) > 0$ sur I

Proposition 3

Si v est une fonction dérivable sur un intervalle J et u une fonction dérivable sur un intervalle I , telle que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$, alors la fonction $(v' \circ u)u'$ admet pour primitive sur I la fonction $v \circ u$.

1.2.3 Exemples 3

— Sur \mathbb{R} , $f(x) = x^4$ alors $F(x) = \frac{x^5}{5}$.

— Sur $]0; +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x^3}$ alors $F(x) = -\frac{1}{2x^2}$.

On peut aussi écrire $f(x) = x^{-3}$, en généralisant la formule de x^n avec $n \in \mathbb{Z}$:

$$F(x) = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}.$$

— Polynôme : $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$, alors

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - x.$$

— Forme $u'u^n$

— $f(x) = 2x(x^2 - 1)^3$, alors $F(x) = \frac{(x^2 - 1)^4}{4}$.

— $f(x) = (3x - 1)^4 = \frac{1}{3}[3(3x - 1)^4]$, alors $F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x - 1)^5}{5} = \frac{(3x - 1)^5}{15}$.

— Forme $\frac{u'}{u}$

— $f(x) = \frac{2}{2x - 3}$, alors $F(x) = \ln |2x - 3|$.

— $f(x) = \frac{1}{4x + 1} = \frac{1}{4} \left[\frac{4}{4x + 1} \right]$, alors $F(x) = \frac{1}{4} \ln |4x + 1|$.

— Forme $\frac{u'}{u^n}$, $n > 2$

— $f(x) = \frac{x + 1}{(x^2 + 2x - 3)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{2x + 2}{(x^2 + 2x - 3)^2} \right]$,

alors $F(x) = -\frac{1}{2(x^2 + 2x - 3)}$.

— Forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

— $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 4}}$, alors $F(x) = 2\sqrt{x + 4}$.

— $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x + 1}} = \frac{3}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{2x + 1}} \right]$, alors $F(x) = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{2x + 1} = 3\sqrt{2x + 1}$.

— Forme $u'e^u$

— $f(x) = e^{4x+1} = \frac{1}{4}[4e^{4x+1}]$, alors $F(x) = \frac{1}{4}e^{4x+1}$.

— $f(x) = xe^{-x^2+3} = -\frac{1}{2}[-2xe^{-x^2+3}]$, alors $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2+3}$.

Remarques 2

— Bien adapter le coefficient lorsque cela est nécessaire pour une forme donnée.

— Trouver la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours facile. Si l'on ne peut faire apparaître les fonctions u et u' , on peut être amené à faire une décomposition en éléments simples ou un changement de variable.

2 Équation Différentielle

2.1 Définitions

Définition 2 - Équation différentielle

- Une équation différentielle d'ordre n est une équation de la forme

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{E})$$

où F est une fonction de $(n + 2)$ variables.

- Une solution d'une telle équation sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui est n fois dérivable et qui vérifie l'équation (E).

Remarques 3

- De coutume pour les équations différentielles on note y au lieu de $y(x)$, y' au lieu de $y'(x)$. On note donc $y' = \sin x$, ce qui signifie $y'(x) = \sin x$.
- Il faut s'habituer au changement de nom pour les fonctions et les variables. Par exemple $(x'')^3 + t(x')^3 + (\sin t)x^4 = e^t$ est une équation différentielle d'ordre 2, dont l'inconnue est une fonction x qui dépend de la variable t . On cherche donc une fonction $x(t)$, deux fois dérivable, qui vérifie $(x''(t))^3 + t(x'(t))^3 + (\sin t)(x(t))^4 = e^t$.
- Rechercher une primitive, c'est déjà résoudre l'équation différentielle $y' = f(x)$.
- Si aucune précision n'est donnée sur l'intervalle I , on considérera qu'il s'agit de $I = \mathbb{R}$.

Définition 3 - Équation différentielle linéaire

- Une équation différentielle d'ordre n est **linéaire** si elle est de la forme

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = g(x)$$

où les a_i et g sont des fonctions réelles continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Définitions 4

- Une équation différentielle linéaire est **homogène**, ou sans second membre, si la fonction g ci-dessus est la fonction nulle :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = 0$$

- Une équation différentielle linéaire est **à coefficients constants** si les fonctions a_i ci-dessus sont constantes :

$$a_0y + a_1y' + \dots + a_ny^{(n)} = g(x)$$

où les a_i sont des constantes réelles et g une fonction continue.

Exemples 4

- $y' + 5xy = e^x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.
- $y' + 5xy = 0$ est l'équation différentielle homogène associée à la précédente.
- $2y'' - 3y' + 5y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre.
- $y'^2 - y = x$ ou $y'' \cdot y' - y = 0$ ne sont pas des équations différentielles linéaires.

2.2 Équation Différentielle linéaire d'ordre 1

Définition 5

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation du type :

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (\text{E})$$

où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} .

2.2.1 Équation différentielle $y' = ay$

Théorème 1

Les équations différentielles de la forme $y' = ay$ où a est un réel non nul ont pour solutions les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$, avec C réel.

Remarque 4

Pour x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution de l'équation différentielle $y' = ay$ prenant la valeur y_0 en x_0 , c'est-à-dire vérifiant la « condition initiale » $f(x_0) = y_0$.

Exemple 5

On considère l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$.

1. Déterminer la solution générale de cette équation.
2. Déterminer l'unique solution telle que $y(1) = 2$.

Solution

$$1. 3y' + 5y = 0 \iff y' = -\frac{5}{3}y \text{ alors ici } a = -\frac{5}{3}.$$

La solution générale est donc : $y(x) = Ce^{-\frac{5}{3}x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

$$2. y(1) = 2 \text{ nous donne } Ce^{-\frac{5}{3}} = 2 \text{ alors } C = 2e^{\frac{5}{3}} \text{ et par conséquent l'unique solution recherchée est } y(x) = 2e^{\frac{5}{3}}e^{-\frac{5}{3}x} = 2e^{-\frac{5}{3}x + \frac{5}{3}}.$$

Équation différentielle $y' = ay + b$

Théorème 2

Les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ où a est un réel non nul et b un réel ont pour solutions les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, avec C réel.

Remarque 5

Pour x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ prenant la valeur y_0 en x_0 , c'est-à-dire vérifiant la « condition initiale » $f(x_0) = y_0$.

Exemple 6

On considère l'équation différentielle $y' = 3y - 2$.

1. Déterminer la solution particulière constante de cette équation.
2. Déterminer la forme générale des solutions de l'équation.

Solution

$$1. \text{ Ici } a = 3 \text{ et } b = -2 \text{ alors la solution particulière constante est } \frac{2}{3}.$$

$$2. \text{ Nous avons alors la solution générale suivante : } C \in \mathbb{R}, y(x) = Ce^{3x} + \frac{2}{3}.$$

2.2.2 Équation différentielle $y' = ay + f$

Théorème 3

Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I .

Étant donnée une solution particulière y_0 de l'équation différentielle $y' = ay + f$, les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} + y_0(x)$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 7

On considère l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur \mathbb{R} par $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est solution de l'équation.
2. En déduire la forme générale de toutes les solutions de l'équation.

Solution

1. $y' - 2y = -x - \frac{1}{2} - +x^2 + x + \frac{1}{2} = x^2$, $u(x)$ est bien une solution de l'équation.
2. La forme générale est alors : $y(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

Fin de chapitre