

Chapitre 11. Primitives et Équations Différentielles. Exercices.

Boulangier Yann

29 janvier 2026

Table des matières

1 Primitives	2
1.1 Exercice 1	2
1.2 Exercice 2	2
1.3 Calcul de primitive	2
1.4 Exercice 3 - Linéarité de la primitive	2
1.5 Exercice 4 - Forme $u'u^n$	2
1.6 Exercice 5 - Forme $\frac{u'}{u}$	3
1.7 Exercice 6 - Forme $\frac{u'}{u^n}$ ($n \geq 2$)	3
1.8 Exercice 7 - Forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$	3
1.9 Exercice 8 - Forme $u'e^u$	3
1.10 Exercice 9 - Forme $u' \times (v \circ u)$	3
1.11 Primitives vérifiant une condition initiale	4
1.12 Exercice 10	4
1.13 Calculs de primitives plus difficiles	4
1.14 Exercice 11	4
1.15 Exercice 12	5
2 Équations différentielles	5
2.1 Exercice 13	5
2.2 Exercice 14	5
2.3 Exercice 15	5
2.4 Applications aux sciences	5
2.5 Exercice 16	5
2.6 Exercice 17	6
2.7 Équation de la forme $y' = ay + f(x)$	6
2.8 Exercice 18	6
2.9 Exercice 19	6
2.9.1 Partie A	6
2.9.2 Partie B	6
2.10 Exercice 20	7
2.10.1 Partie A	7
2.10.2 Partie B	7

1 Primitives

1.1 Exercice 1

Prouver dans les cas suivants que la fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I proposé.

1) $f(x) = \frac{2(x^4 - 1)}{x^3}$ et $F(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ sur $I =]0; +\infty[$

2) $f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$ et $F(x) = x - \ln(1 + e^x)$ sur $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ et $F(x) = \ln(\ln x)$ sur $I =]1; +\infty[$

4) $f(x) = \cos x - x \sin x$ et $F(x) = x \cos x$ sur $I = \mathbb{R}$

1.2 Exercice 2

On donne $F(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$ et $G(x) = \frac{x^2 + 7x - 5}{x - 1}$.

1. Montrer que les fonctions F et G sont deux primitives de la même fonction f sur un intervalle I que l'on précisera.
2. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

1.3 Calcul de primitive

Pour les exercices suivants, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I .

1.4 Exercice 3 - Linéarité de la primitive

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x + 3$, $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3}$, $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^3}$, $I =]0; +\infty[$

4) $f(x) = -\frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^2} - 1$, $I =]0; +\infty[$

5) $f(x) = \frac{4}{x} + 2e^x$, $I =]0; +\infty[$

1.5 Exercice 4 - Forme $u'u^n$

1) $f(x) = (x + 2)^3$, $I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = 2x(1 + x^2)^5$, $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \frac{(x - 1)^5}{3}$, $I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = 2x(3x^2 - 1)^3$, $I = \mathbb{R}$

5) $f(x) = \sin x \cos x$, $I = \mathbb{R}$

6) $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$, $I =]0; +\infty[$

1.6 Exercice 5 - Forme $\frac{u'}{u}$

1) $f(x) = \frac{1}{x-4}, I =]4; +\infty[$

2) $f(x) = \frac{1}{x-4}, I =]-\infty; 4[$

3) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x}, I =]0; 1[$

4) $f(x) = \frac{e^x}{e^x+2}, I = \mathbb{R}$

1.7 Exercice 6 - Forme $\frac{u'}{u^n}$ ($n \geq 2$)

1) $f(x) = \frac{2}{(x+4)^3}, I =]-4; +\infty[$

2) $f(x) = \frac{1}{(3x-1)^2}, I = \left] -\infty; \frac{1}{3} \right[$

3) $f(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x+3)^2}, I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \frac{x-1}{(x^2-2x-3)^2}, I =]-1; 3[$

5) $f(x) = \frac{4x^2}{(x^3+8)^3}, I =]-2; +\infty[$

6) $f(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^2 x}, I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

1.8 Exercice 7 - Forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$

1) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{2x+1}}, I = \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$

2) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}, I =]1; +\infty[$

1.9 Exercice 8 - Forme $u'e^u$

1) $f(x) = e^{-x+1}, I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = 2e^{3x-2}, I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}, I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = \sin x \times e^{\cos x}, I = \mathbb{R}$

1.10 Exercice 9 - Forme $u' \times (v \circ u)$

1) $f(x) = \cos(3x) + \sin(2x), I = \mathbb{R}$

2) $f(x) = 3 \cos x - 2 \sin(2x) + 1, I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right), I = \mathbb{R}$

1.11 Primitives vérifiant une condition initiale**1.12 Exercice 10**

Déterminer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée sur un intervalle I à préciser.

1) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 4x + 1, F(2) = 0$

2) $f(x) = \frac{2}{x^2} + x, F(1) = 0$

3) $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}, F(0) = 0$

4) $f(x) = -\frac{1}{3-x}, F(1) = 1$

5) $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}, F(0) = 0$

6) $f(x) = e^{3x+1}, F(-1) = 0$

7) $f(x) = xe^{-x^2}, F(\sqrt{\ln 2}) = 1$

8) $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}, F(2) = 0$

9) $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right), F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

10) $f(x) = \cos x \sin^2 x, F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

11) $f(x) = 2 \cos \frac{x}{2} - 3 \sin \frac{x}{2}, F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

1.13 Calculs de primitives plus difficiles**1.14 Exercice 11**

Calculer une primitive de la fonction f sur l'intervalle indiqué.

1) $f(x) = \frac{x^2}{x^3-1}, I =]-\infty; 1[$

2) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}, I =]-\pi; 0[$

3) $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{2}{x}}, I =]0; +\infty[$

4) $f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, I =]0; +\infty[$

5) $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}, I =]0; +\infty[$

6) $f(x) = \frac{\ln x}{2x}, I =]0; +\infty[$

7) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}, I =]1; +\infty[$

8) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, I = \mathbb{R}$

1.15 Exercice 12

f désigne une fonction rationnelle définie sur un intervalle I . Déterminer une primitive de f à l'aide de la décomposition proposée.

1) $f(x) = \frac{4x+5}{2x+1}$, $I =]-\frac{1}{2}; +\infty[$. Montrer que $f(x) = a + \frac{b}{2x+1}$

2) $f(x) = \frac{2x^2-3x-4}{x-2}$, $I =]2; +\infty[$. Montrer que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

3) $f(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3}$ avec :

a) $I =]3; +\infty[$ b) $I =]-3; 3[$ c) $I =]-\infty; -3[$

4) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{(x^2-1)^2}$, $I =]1; +\infty[$. Montrer que $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x+1)^2}$

2 Équations différentielles

2.1 Exercice 13

Résoudre l'équation différentielle proposée :

1) $y' = 3y$

2) $y' + 2y = 0$

3) $y' = 2y + 1$

4) $y + 3y' = 2$

5) $2y + 3y' - 1 = 0$

6) $2y' = y - 1$

2.2 Exercice 14

Résoudre les équations différentielles proposées avec la condition initiale proposée :

1) $y = -5y'$ avec $f(-2) = 1$

2) $y + 2y' = 0$ avec $f'(-2) = \frac{1}{2}$

2.3 Exercice 15

Trouver une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ pour laquelle f est solution.

1) f est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 3e^{-3x}$.

2) f est la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 3e^{-2x} - 4$.

2.4 Applications aux sciences

2.5 Exercice 16

Le nombre de bactéries $N(t)$ d'une culture initialement à 600 passe au bout de 2 heures à 1 800. On suppose que le taux de croissance est proportionnel au nombre de bactéries présentes.

1. (a) Donner une équation différentielle qui traduit le problème puis déterminer $N(t)$ à l'aide des conditions imposées.
- (b) Déterminer le nombre de bactéries après 4 heures.
- (c) Déterminer le temps t nécessaire pour que le nombre de bactéries dépasse 12 000.

2. Compléter l'algorithme ci-contre afin qu'il donne le résultat attendu à la question 1 c) (à la demi-heure près).

```

from math import*
t=0
N=600
while .... 12000:
    t =...
    N=...
print ( ... )

```

2.6 Exercice 17

Le circuit ci-contre comprend une bobine d'induction L , une résistance R . L'origine du temps est à la fermeture du circuit. À $t = 0$, l'intensité i est nulle. La force électromotrice aux bornes du circuit est constante et égale à E . On sait que l'intensité $i(t)$ est telle que, à l'instant $t > 0$ on a :

$$Li'(t) + Ri(t) = E$$

1. Résoudre cette équation différentielle. Trouver la fonction i telle que $i(0) = 0$.
2. Déterminer la limite de $i(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Commenter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

2.7 Équation de la forme $y' = ay + f(x)$

2.8 Exercice 18

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 3y = e^{2x}$.

1. Déterminer le réel a tel que la fonction p définie sur \mathbb{R} par $p(x) = ae^{2x}$ soit une solution particulière de (E) .
2. Résoudre sur \mathbb{R} l'équation (E) .
3. Déterminer la solution de (E) vérifiant $y(0) = 1$.

2.9 Exercice 19

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$.

2.9.1 Partie A

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 2y = 3e^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E') : y' + 2y = 0$.
2. En déduire que h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = \frac{9}{2}e^{-2x}$ est solution de (E') .
3. Vérifier que g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de (E) .
4. En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E) .

2.9.2 Partie B

Soit \mathcal{C}_f la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité 1 cm.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Étudier les variations puis dresser le tableau de variations de f .
3. Calculer les coordonnées des points d'intersection de \mathcal{C}_f avec les axes.

2.10 Exercice 20

2.10.1 Partie A

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{3e^{4x}}{2 + e^{4x}}$.

1. Démontrer que $f(x) = \frac{3}{1 + 2e^{-4x}}$.
2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Étudier les variations puis dresser le tableau de variations de f .

2.10.2 Partie B

1. On a étudié l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, en centaine d'individus, au temps t , en années, est notée $g(t)$. La fonction g , définie de l'intervalle $[0; +\infty[$ dans \mathbb{R} , modèle choisi pour décrire cette évolution, est une solution de l'équation différentielle : $(E_1) : y' = \frac{y}{4}$.
 - (a) Résoudre l'équation différentielle (E_1) .
 - (b) Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 100 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 1$.
2. En réalité, dans un secteur observé d'une région donnée, un prédateur empêche une telle croissance en tuant une certaine quantité de rongeurs. On note $u(t)$ le nombre de rongeurs vivants au temps t (exprimé en années) dans cette région, et on admet que la fonction u , ainsi définie, satisfait aux conditions

$$(E_2) : \begin{cases} u'(t) = \frac{u(t)}{4} - \frac{u^2(t)}{12} & \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

- (a) On suppose que u ne s'annule pas pour $t > 0$. Soit la fonction h définie sur $[0; +\infty[$ par $h = \frac{1}{u}$. Démontrer que la fonction u satisfait aux conditions (E_2) si, et seulement si, la fonction h satisfait aux conditions :

$$(E_3) : \begin{cases} h'(t) = -\frac{1}{4}h(t) + \frac{1}{12} & \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ h(0) = 1 \end{cases}$$

- (b) Donner les solutions de l'équation différentielle : $y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$ et en déduire l'expression de la fonction h , puis celle de la fonction u .
- (c) Dans ce modèle, comment se comporte la taille de la population étudiée lorsque t tend vers $+\infty$?

Fin des exercices