

Chapitre 7. Nombres Premiers. Exercices.

Boulangier Yann

25 juin 2025

Table des matières

1	Exercice 1	2
2	Exercice 2	2
3	Exercice 3	2
4	Exercice 4	2
5	Exercice 5	2
6	Exercice 6	2
7	Exercice 7	2
8	Exercice 8	2
9	Exercice 9	2
10	Exercice 10	3
11	Exercice 11	3
12	Exercice 12	3
13	Exercice 13	3
14	Exercice 14	3
15	Exercice 15	3
16	Exercice 16	4
17	Exercice 17	4
18	Exercice 18	4

1 Exercice 1

Ces entiers sont-ils premiers ? 97 ; 323 ; 401 ; 527 ; 719 ; $6k + 2$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

2 Exercice 2

Ces entiers sont-ils premiers ?

1. $A_n = 4^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $B_n = n^2 - 6n + 5$ pour tout entier $n \geq 7$.
3. $C = 10^{2024} + 1$

3 Exercice 3

1. Montrer que $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.
2. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le nombre $n^3 - 27$ est-il premier ?
3. Existe-t-il des valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles $n^6 - 27$ est premier ?

4 Exercice 4

Montrer que tout nombre premier impair est congru à -1 ou 1 modulo 4 .

5 Exercice 5

Montrer que si la somme de deux entiers a et b est un nombre premier alors a et b sont premiers entre eux.

6 Exercice 6

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 3 .

Démontrer que si n et $5n - 2$ sont des nombres premiers alors $5n + 2$ n'est pas un nombre premier.

7 Exercice 7

Décomposer le nombre 3546 en produit de facteurs premiers et déterminer la liste de ses diviseurs.

8 Exercice 8

Par combien de zéros se termine le nombre 16384×15625 ?

9 Exercice 9

Décomposer 1764 en produits de facteurs premiers. En déduire la valeur exacte de $\sqrt{1764}$.

10 Exercice 10

En utilisant la décomposition en facteurs premiers, déterminer le PGCD des nombres a et b suivants :

- a) $a = 1188, b = 1485$;
- b) $a = 3780, b = 3528$.

11 Exercice 11

Pour tout entier naturel $n \neq 0$, on appelle $S(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n .

1. Vérifier que $S(6) = 12$ et calculer $S(7)$.
2.
 - a) Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $S(n) \geq 1 + n$.
 - b) Quels sont les entiers naturels n tels que $S(n) = 1 + n$?

12 Exercice 12

Montrer que pour tout entier naturel n , le nombre $n^{11} - n$ est divisible par 33.

13 Exercice 13

Montrer que pour tout nombre entier naturel n , 7 divise $3^{6n} - 1$.

14 Exercice 14

Soient deux entiers relatifs a et b et p un nombre premier. Montrer que $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.

15 Exercice 15

Soit p un nombre premier impair. Montrer que si p divise $(p - 1)! + 1$, alors p est un nombre premier.

1. On suppose dans cette question que n s'écrit $p \times q$ où p et q sont des nombres premiers distincts.
 - a) Démontrer que $S(n) = (1 + p)(1 + q)$.
 - b) Cette proposition est-elle vraie ou fausse ? "Pour tous entiers naturels n et m non nuls distincts, $S(n \times m) = S(n) \times S(m)$ ".
2. On suppose dans cette question que $n = p^k$, où p est un nombre premier et $k \geq 1$.
 - a) Quels sont les diviseurs de n ?
 - b) En déduire que $S(n) = \frac{1 - p^{k+1}}{1 - p}$.
3. On suppose dans cette question que $n = p^{13} \times q^7$, où p et q sont des nombres premiers distincts.
 - a) Soit $m \in \mathbb{N}$. Démontrer que m divise n si et seulement si il existe $0 \leq s \leq 13$ et $0 \leq t \leq 7$, tels que $m = p^s \times q^t$.
 - b) Démontrer que $S(n) = \frac{1 - p^{14}}{1 - p} \times \frac{1 - q^8}{1 - q}$.

16 Exercice 16

Un nombre n s'écrit $2^\alpha 3^\beta$ où α et β sont deux entiers naturels.

Le nombre de diviseurs de $12n$ est le double du nombre de diviseurs de n .

1. Montrer que $\beta(\alpha - 1) = 4$.
2. En déduire les valeurs possibles pour n .

17 Exercice 17

Pour tout entier naturel n , on note $\phi(n)$ le nombre de nombres premiers avec n compris entre 1 et n .

1. Montrer que si p est premier alors $\phi(p) = p - 1$.
2. Montrer que si p est premier alors $\phi(p^2) = p(p - 1)$.

18 Exercice 18

Soit p un nombre premier. Montrer que \sqrt{p} est irrationnel.

Fin de chapitre