

# Chapitre 6. Graphes et Matrices Exercices.

Boulangier Yann

28 février 2026

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Description d'un graphe et vocabulaire</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Graphe complet</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Graphe connexe</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Longueur d'une chaîne et diamètre d'un graphe</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Matrice d'adjacence d'un graphe</b>	<b>7</b>
<b>6</b>	<b>Nombre de chaînes de longueur</b>	<b>8</b>
<b>7</b>	<b>Problèmes</b>	<b>10</b>

# 1 Description d'un graphe et vocabulaire

## Exercice 1

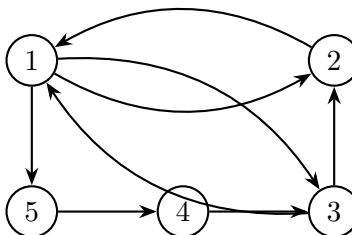
Un cube peut être vu comme un graphe.

Décrire le graphe correspondant, puis donner son ordre.

Aide : pour décrire un graphe, il faut dénombrer ses sommets, dénombrer ses arêtes, préciser s'il s'agit d'un graphe simple ou non, d'un graphe orienté ou non.

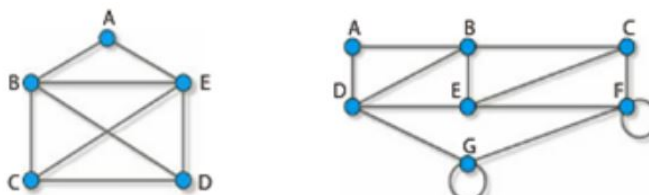
## Exercice 2

QCM : trouver toutes les bonnes réponses. On donne le graphe ci-dessous.



- |   |            |                |      |
|---|------------|----------------|------|
| 1. Ce graphe est un graphe :                              | a) orienté | b) non orienté |      |
| 2. L'ordre du graphe est :                                | a) 5       | b) 4           | c) 3 |
| 3. Le nombre d'arêtes du graphe est :                     | a) 6       | b) 7           | c) 8 |
| 4. Le degré du sommet 1 est :                             | a) 5       | b) 4           | c) 3 |
| 5. Si on ajoute une boucle au sommet 3, il a pour degré : | a) 4       | b) 5           | c) 6 |

## Exercice 3



Pour les deux graphes ci-dessus, dire s'il s'agit d'un graphe simple ou non, donner le degré de chacun des sommets à l'aide d'un tableau puis donner l'ordre du graphe.

## Exercice 4 :

- Schématiser chaque situation ci-dessous par un graphe.
- Recopier et compléter le tableau suivant pour chaque situation.

Situation 1

Ordre du Graphe					
Nom du Sommet					
Degré du Sommet					

Situation 2

Ordre du Graphe					
Nom du Sommet					
Degré du Sommet					

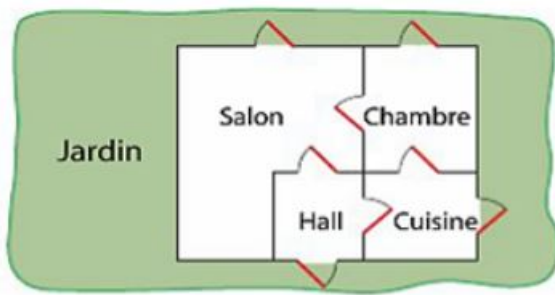
Situation 3

Ordre du Graphe					
Nom du Sommet					
Degré du Sommet					

- Comparer et conclure.

*Première situation*

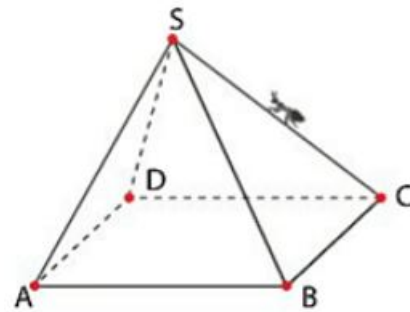
Voici le plan du rez-de-chaussée d'une maison.



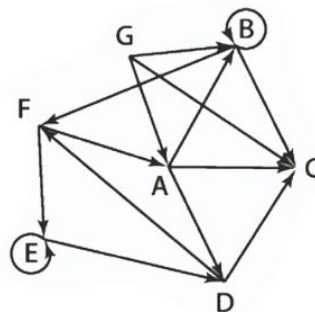
On s'intéresse à la communication entre les différentes pièces et le jardin.

*Deuxième situation*

Une fourmi se déplace sur les arêtes d'une pyramide.

*Troisième situation* - Découpage d'une carte.

Le Centre d'études et d'application pour les nouvelles technologies éducatives a découpé la carte de France comme ci-contre. On s'intéresse aux frontières entre les zones de couleurs différentes.

**Exercice 5 :**

1. Déterminer l'ordre du graphe ainsi que le degré de chaque sommet.
2. En déduire par un calcul le nombre d'arcs de ce graphe.
3. Déterminer une chaîne de longueur 5 reliant A à C.
4. Peut-on trouver un cycle d'origine A ?
5. Peut-on trouver un cycle d'origine C ?

**Exercice 6**

Est-il possible de dessiner un graphe :

- à 5 sommets de degrés respectifs 5, 4, 3, 2 et 1 ?
- à 7 sommets de degrés respectifs 7, 6, 5, 4, 3, 2 et 1 ?

**Exercice 7**

Construire un graphe à 4 sommets A, B, C et D, de degrés respectifs 1, 5, 1, 1 et ayant 4 arêtes.

**Exercice 8**

Utiliser la propriété de la somme des degrés

*Situation 1*

on considère un heptagone (polygone à 7 côtés) avec ses diagonales : on obtient un graphe complet.

Quel est le nombre de segments sur cette figure ?

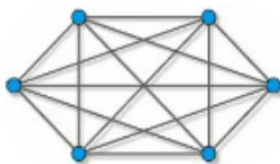
*Situation 2*

7 amis se saluent en se serrant la main. Combien de poignées de main vont-elles être échangées ?

*Situation 3*

ces 7 amis veulent organiser un tournoi de combat de pouces où chaque joueur en rencontre 3 autres. Comment les aider ?

## 2 Graphe complet

**Exercice 9**

Le graphe représenté ci-contre est-il complet ?

**Exercice 10**

Dessiner le graphe complet d'ordre 5.

Quel est le degré de chacun des sommets ? Combien comporte-t-il d'arêtes ?

**Exercice 11**

Le plan ci-dessus représente le réseau des pistes cyclables desservant certains sites d'une agglomération. On ne se préoccupe pas des voies qui mènent hors de la ville.

1. Construire le graphe associé à ce réseau. On notera chaque site par la première lettre.
2. Décrire ce graphe (ordre, nature).
3. Indiquer, dans un tableau, le degré de chacun de ses sommets. Le graphe est-il complet ? Justifier.
4. Quelle remarque pouvez-vous faire concernant ce reproche adressé à la mairie : « La municipalité se doit de construire des pistes cyclables pour que deux sites quelconques de l'agglomération soient reliés directement ! »

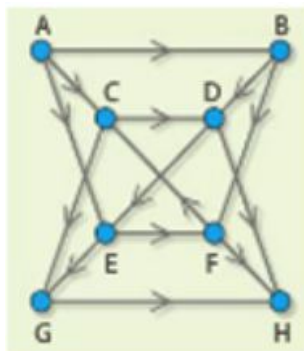
### Exercice 12

Le jeu « Pierre – Feuille – Ciseaux » est un jeu à deux joueurs dans lequel les deux participants révèlent simultanément le symbole choisi.

Les règles sont les suivantes : la Pierre bat les Ciseaux en les émoussant, les Ciseaux battent la Feuille en la coupant et la Feuille bat la Pierre en l'enveloppant.

Traduire cette situation par un graphe orienté où une arête  $X \rightarrow Y$  signifie que « X bat Y ».

### Exercice 13



On considère le graphe orienté ci-dessus :

1. Donner trois chaînes reliant A à H, dont une comportant au moins cinq arêtes.
2. Peut-on trouver une chaîne reliant G à B ?

### Exercice 14

Le jeu « Pierre-Feuille-Ciseaux » est à l'origine de bon nombre de variantes et d'améliorations.

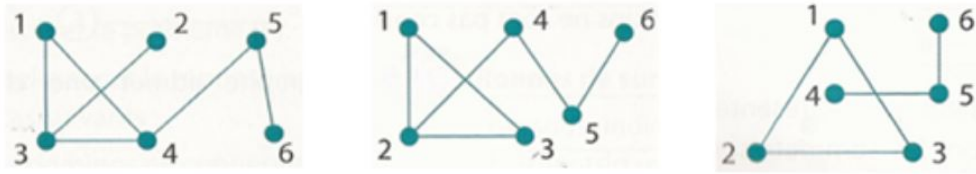
En voici une : il s'agit de « Ninja – Pirate – Robot – Singe – Zombie ».

Par exemple : le singe éteint le robot et déconcentre le ninja, mais se fait embrocher par le pirate et dévorer par le zombie.

Proposer une organisation possible et équilibrée d'un tel jeu à l'aide d'un graphe orienté, où une arête  $X \rightarrow Y$  signifie que « X bat Y ».

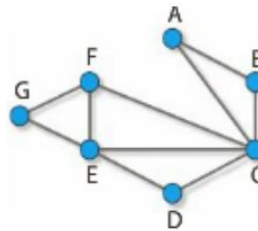
### 3 Graphe connexe

#### Exercice 15



Dire si les graphes sont connexes ou non. Justifier.

#### Exercice 16

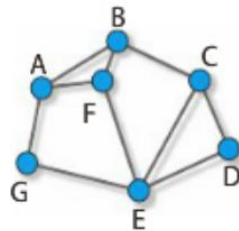


Démontrer que le graphe ci-dessus est connexe.

### 4 Longueur d'une chaîne et diamètre d'un graphe

#### Exercice 17

Soit  $\Gamma$  le graphe représenté ci-dessous et constitué des sommets A, B, C, D, E, F et G.

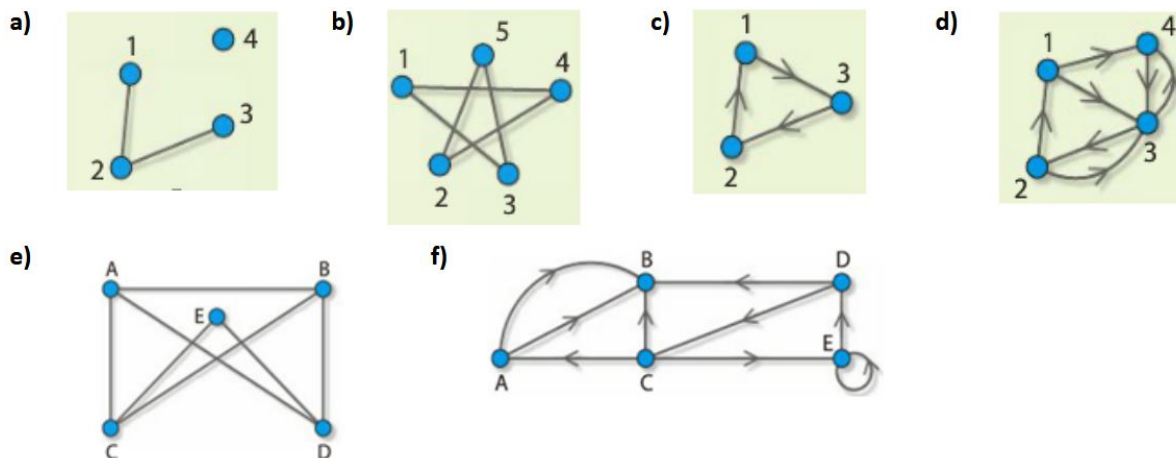


1. Déterminer son ordre ainsi que le degré de chacun de ses sommets.
2. Dresser le tableau des distances entre deux sommets de  $\Gamma$ .
3. En déduire le diamètre de ce graphe.

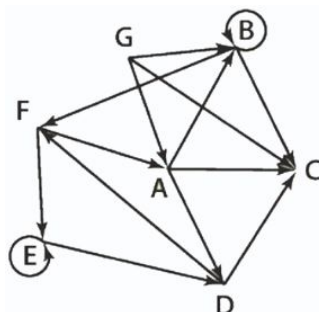
## 5 Matrice d'adjacence d'un graphe

### Exercice 18

Pour chacun des exemples suivants, construire la matrice associée au graphe donné.



### Exercice 19



- Déterminer une matrice d'adjacence  $M$  de ce graphe.
- Combien y a-t-il de chaînes de longueur 5 reliant A à C ?

### Exercice 20

Pour chacune des matrices données ci-dessous, représenter un graphe possible :

a)  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  ; b)  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

### Exercice 21

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier la réponse.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère le graphe de sommets A, B, C, D et E dont la matrice  $M$  est ci-dessus :

- Ce graphe ne contient pas de boucle.
- Ce graphe est un graphe orienté.

- c) Le degré du premier sommet est 6.
- d) Il y a deux arêtes qui partent de B.
- e) Il y a deux arêtes qui arrivent à B.
- f) Le graphe contient 11 arêtes.

**Exercice 22**

On considère le graphe associé à la matrice suivante :  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Ce graphe est-il orienté? Justifier la réponse.
2. Quel est le nombre de ses arêtes? Expliquer comment l'obtenir.
3. A-t-il des boucles? Si oui, lesquelles? Justifier.

**6 Nombre de chaînes de longueur****Exercice 23**

Soit  $M$  la matrice suivante :  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer  $M^2$ .
2. Combien y a-t-il de chaînes de longueur 2 entre A et B?
3. Combien y a-t-il de chaînes de longueur 2 entre C et A?

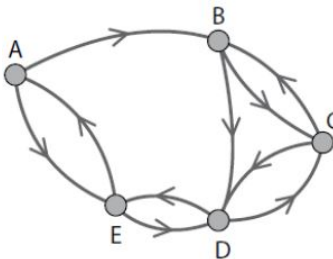
**Exercice 24**

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier la réponse.

On considère le graphe de sommets A, B, C, D et E

dont la matrice  $M$  est ci-contre :  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Le graphe contient une chaîne orientée passant par tous les sommets du graphe.
2. Le graphe contient une chaîne orientée de longueur 3, reliant le sommet A au sommet B.
3. Le graphe contient six chaînes orientées de longueur 5, reliant les sommets E et D.

**Exercice 25 :**

1. Donner la matrice  $M$  associée au graphe  $G$ , en ordonnant les sommets dans l'ordre alphabétique.
2. Vérifier, à l'aide de la calculatrice, que :

$$M^5 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 7 & 11 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 11 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & 6 & 10 \\ 6 & 5 & 5 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Combien y-a-t-il de chemins de longueur 5 permettant de se rendre du sommet D au sommet B ? Les citer tous.
4. Montrer qu'il existe un seul cycle de longueur 5 et d'origine A. Quel est ce cycle ?
5. En est-il de même pour le sommet B ?

### Exercice 26

soit  $M$  la matrice d'un graphe orienté  $G$  dont les sommets A, B, C, D et E sont pris dans l'ordre alphabétique. On donne :

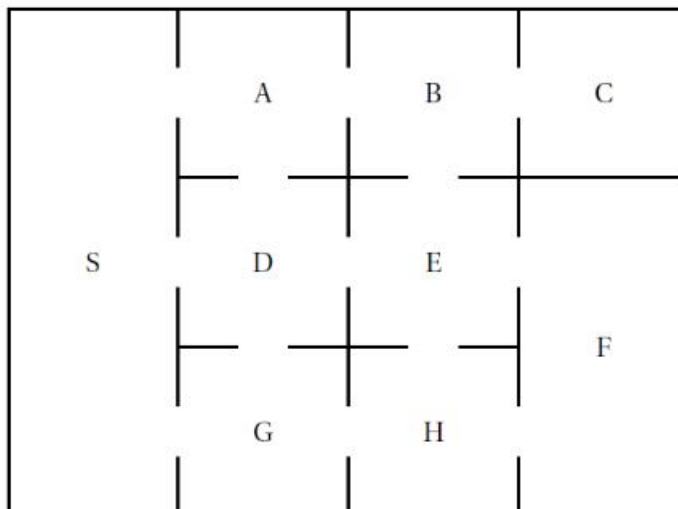
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Construire le graphe  $G$ .
2. Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 liant B à D. Les citer toutes.

## 7 Problèmes

### Exercice 27

Un musée est constitué de 9 salles notées A, B, C, D, E, F, G, H et S. Le plan du musée est représenté ci-dessous :



Ainsi, un visiteur qui se trouve dans la salle S peut atteindre directement les salles A, D ou G. S'il se trouve dans la salle C, il peut se rendre directement dans la salle B mais pas dans la salle F. On s'intéresse au parcours d'un visiteur dans ce musée. On ne se préoccupe pas de la manière dont le visiteur accède au musée ni comment il en sort. Cette situation peut être modélisée par un graphe, les sommets étant les noms des salles, les arêtes représentant les portes de communication.

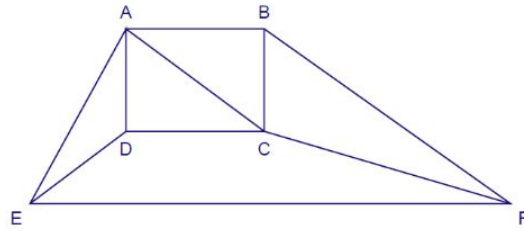
1. Dessiner un graphe modélisant la situation décrite.
2. Est-il possible de visiter le musée, en empruntant chaque porte une fois et une seule ?
3. On note  $M$  la matrice à 9 lignes et 9 colonnes associée au graphe précédent, en convenant de l'ordre suivant des salles S, A, B, C, D, E, F, G, H. Le graphe n'étant pas orienté, comment cela se traduit-il sur la matrice ?
4. On donne la matrice :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 18 & 12 & 11 & 2 & 20 & 12 & 6 & 12 & 12 \\ 12 & 20 & 3 & 6 & 11 & 20 & 5 & 18 & 5 \\ 11 & 3 & 16 & 0 & 19 & 3 & 8 & 4 & 12 \\ 2 & 6 & 0 & 3 & 1 & 7 & 1 & 4 & 1 \\ 20 & 11 & 19 & 1 & 31 & 9 & 11 & 12 & 19 \\ 12 & 20 & 3 & 7 & 9 & 28 & 9 & 20 & 9 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 11 & 9 & 9 & 8 & 9 \\ 12 & 18 & 4 & 4 & 12 & 20 & 8 & 20 & 6 \\ 12 & 5 & 12 & 1 & 19 & 9 & 9 & 6 & 17 \end{pmatrix}$$

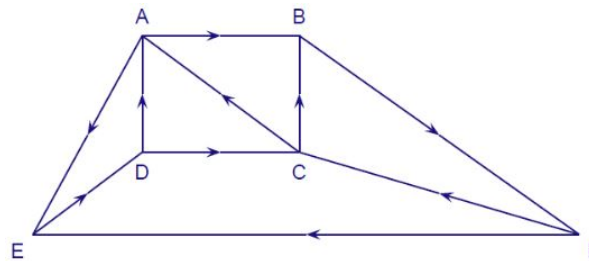
- a) Combien y-a-t-il de chemins qui en 4 étapes, partent de D et reviennent à D ?
- b) Combien y-a-t-il de chemins qui en 4 étapes, partent de S et reviennent à C ? Les citer.
- c) Est-il toujours possible de joindre en 4 étapes deux salles quelconques ? Justifier.

**Exercice 28**

Le graphe suivant représente le plan d'une ville. Les arêtes du graphe représentant ses avenues commerçantes et les sommets du graphe les carrefours de ces avenues.



1. Donner l'ordre de ce graphe, puis le degré de chacun de ses sommets.
2. Un piéton peut-il parcourir toutes ces avenues sans emprunter plusieurs fois la même avenue ? Justifier votre réponse.
3. Dans le graphe suivant, on a indiqué le sens de circulation dans les différentes avenues.



Écrire la matrice  $M$  associée à ce graphe. On rangera les sommets dans l'ordre alphabétique.

4. Quel est le nombre de trajets de longueur 2 reliant D à B ?
5. Comment pourrait-on obtenir ce résultat uniquement par le calcul à partir de la matrice  $M$  ?

**Fin de chapitre**