Chapitre 10. Fonction Logarithme Népérien

Boulanger Yann

22 août 2025

Table des matières

1 Introduction du logarithme

1.1 Définition

Définition
La fonction logarithme népérien, notée ln, est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1.

Conséquences directes :
- $\ln(1) = 0$,
- la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Remarque
Il existe différentes fonctions logarithmes ; dans ce chapitre, on étudie la fonction logarithme mise en évidence par l'Écossais J. Neper, et qui porte son nom : le logarithme népérien.

Propriété
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et u une fonction strictement positive sur I, alors la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est définie sur I.

Exemple
Ensemble de définition I de la fonction définie par $f(x) = \ln(x+3)$:

$$x + 3 > 0 \iff x > -3 \Rightarrow D_f =]-3;+\infty[.$$

1.2 Relation fondamentale

Propriété
Soient $a, b > 0$, alors : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Démonstration
Soit $b > 0$ fixé. Pour $x > 0$, posons $f(x) = \ln(xb)$.
Alors $f'(x) = \frac{b}{xb} = \frac{1}{x}$.
Par intégration : $f(x) = \ln(x) + K$. En posant $x = 1$, $f(1) = \ln(b) = K$. Donc $f(x) = \ln(x) + \ln(b)$.
En particulier pour $x = a$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Propriété
Soient $a, b > 0$ et $n \in \mathbb{N}$:
- $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$,
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$,
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$,
- $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$.

Remarque
La propriété fondamentale se généralise : $\ln(a_1 a_2 \cdots a_n) = \ln(a_1) + \cdots + \ln(a_n)$.

Exemple

Transformations numériques :

$$\begin{aligned}
\ln(24) &= \ln(2^3 \times 3) = 3\ln(2) + \ln(3), \\
\ln\left(\frac{192}{108}\right) &= \ln\left(\frac{16}{9}\right) = 4\ln(2) - 2\ln(3), \\
\ln(\sqrt{96}) &= \tfrac{1}{2}[5\ln(2) + \ln(3)].
\end{aligned}$$

Exemple
Transformations algébriques :

$$\begin{aligned}
\ln(x+3) + \ln(2x+1) &= \ln((x+3)(2x+1)) = \ln(2x^2 + 7x + 3), \\
\ln(3x) - \ln(3) + \ln(x^2) &= \ln\left(\frac{3x \cdot x^2}{3}\right) = \ln(x^3) = 3\ln(x), \\
\ln(\sqrt{x-1}) &= \tfrac{1}{2}\ln(x-1).
\end{aligned}$$

2 Étude de la fonction logarithme

2.1 Variations

La dérivée $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc ln est croissante sur $]0; +\infty[$.

2.2 Fonction $\ln(u)$

Propriété
Si u est strictement positive et dérivable sur I, alors $(\ln(u(x)))' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemples
$f(x) = \ln(x^2+1)$: $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.
$g(x) = \ln(x-2)$: $g'(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

2.3 Croissance comparée

Propriété
Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^n\ln(x) = 0.$$

Remarque : On dit que « le x l'emporte sur le logarithme ».

3 Équations et inéquations

3.1 Nombre e

$\ln(x) = 1$ admet une unique solution $e \approx 2,718$. Ainsi : $\ln(e) = 1$ et $\ln(e^k) = k$.

Exemples : $\ln(e^2) = 2$, $\ln(e^4) = 4$, $\ln(e^{-1}) = -1$.

3.2 Résolution d'équations

Propriété

Pour $u, v > 0$:

- $\ln(u) = \ln(v) \iff u = v$,
- $\ln(u) = \lambda \iff u = e^\lambda$.

Exemples

- $\ln(x) = 4 \iff x = e^4$.
- $2\ln(x) - \ln(x^3) = -5 \iff x = e^5$.
- $\ln(-x^2 + 9) = 0 \iff x = \pm 2\sqrt{2}$ (valables car $x \in]-3; 3[$).

3.3 Résolution d'inéquations

Propriété

Pour $u, v > 0$:

- $\ln(u) < 0 \iff 0 < u < 1$,
- $\ln(u) > 0 \iff u > 1$,
- $\ln(u) < \ln(v) \iff u < v$.

Exemple

Résoudre $\ln(x^2 - 4) < \ln(3x)$: solution $S =]4; +\infty[$.

4 Logarithme décimal

La fonction log est définie par $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Exemple

$$\log(10) = 1, \qquad \log(100) = 2, \qquad \log(0,1) = -1.$$

5 Exercice

Soit $f(x) = \dfrac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$ définie sur $]-1;+\infty[$.

Partie A

1. Limites en $+\infty$ et en -1.
2. Asymptotes.
3. Étudier $f'(x)$ et dresser le tableau de variations.

Partie B

1. Tangente en $x = 0$.
2. Résolution de $f(x) = 0$ dans $[1; 5]$.
3. Signe de f sur $[0; \alpha]$.

Fin de chapitre