Chapitre 8. Suites Particulières. Cours.

Boulanger Yann

26 janvier 2026

Table des matières

1 Suites particulières : arithmétiques et géométriques

Activité

Un étudiant loue une chambre pour 3 ans. On lui propose deux types de bail :

— Premier contrat :
un loyer de 200 pour le premier mois, puis une augmentation de 5 par mois jusquà la fin du bail ;

— Second contrat :
un loyer de 200 pour le premier mois, puis une augmentation de 2 % par mois jusquà la fin du bail.

1. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du deuxième mois puis le loyer du troisième mois.
2. Calculer, pour chacun des deux contrats, le loyer du dernier mois, cest-à-dire celui du 36e mois.
3. Quel est le contrat globalement le plus avantageux pour un bail de 3 ans ? (Justifier à laide de calculs).

1.1 Suites arithmétiques

1.1.1 Définition et premières propriétés

Définition

On appelle suite arithmétique toute suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{où } r \in \mathbb{R}.$$

r est appelé la raison de la suite arithmétique.

Remarque

Pour démontrer quune suite est arithmétique, il suffit de montrer que, pour tout n, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante. Cette constante sera alors la raison de la suite.

1.1.2 Forme explicite

Exemples

— La suite constituée des montants des loyers correspondant au premier contrat de lactivité est une suite arithmétique définie par $u_0 = 200$ et $u_{n+1} = u_n + 5$ (qui sarrête toutefois à $n = 36$).

— La suite formée par les nombres entiers naturels pairs est une suite arithmétique. Celle formée par les nombres entiers naturels impairs aussi.

— La suite définie par : pour tout n, $u_n = 3n - 2$ est arithmétique.

$$\text{En effet } u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - (3n-2) = 3 \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + 3 \text{ (de raison 3).}$$

— La suite définie par : pour tout n, $u_n = n^2$ nest pas arithmétique.

$$\text{En effet } u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 \neq \text{constante.}$$

On peut le voir encore plus facilement sur les premiers termes :

$$u_1 - u_0 = 1 \neq u_2 - u_1 = 3.$$

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et raison r.
Alors, pour tout entier naturel n et tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$, on a :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Et en particulier, avec $p = 0$:

$$u_n = u_0 + nr$$

Remarque
Cette propriété est importante car elle transforme une suite arithmétique, définie par récurrence ($u_{n+1} = f(u_n)$), en une suite définie explicitement ($u_n = f(n)$).

Démonstration

— Commençons par démontrer par récurrence le second point :

1. Pour $n = 0$, la formule est trivialement vraie : $u_0 = u_0 + 0r$. De même pour $n = 1$: par définition de la suite, $u_1 = u_0 + 1r$.
2. Si $u_n = u_0 + nr$ alors $u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r$.
3. (1) La propriété est vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$; (2) si elle est vraie pour n alors elle est vraie pour $n + 1$; (3) donc elle est vraie pour tout n.

— Démontrons alors le premier point :

$$u_p + (n-p)r = u_0 + pr + (n-p)r = u_0 + nr = u_n.$$

1.1.3 Variations dune suite arithmétique

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :

— si $r > 0$, (u_n) est strictement croissante ;

— si $r < 0$, (u_n) est strictement décroissante ;

— si $r = 0$, (u_n) est constante.

Démonstration
Pour tout $n \geq 0$ on a $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$, ce qui donne le résultat.

1.1.4 Convergence dune suite arithmétique

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors

— si $r > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$;

— si $r < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$;

— si $r = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$.

Démonstration
On a $u_n = u_0 + nr = f(n)$ avec $f(x) = rx + u_0$ qui est une fonction affine.
On obtient alors les limites de la propriété avec celles des fonctions affines.

1.1.5 Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Pour obtenir ce résultat, nous avons besoin de la petite propriété suivante.

Lemme

Soit $S = 1 + 2 + \ldots + n$ la somme des n premiers entiers. Alors

$$S = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{(1+n)n}{2}.$$

Démonstration

Écrivons S de deux manières :

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n \\ \text{et } S &= n + (n-1) + \ldots + 2 + 1 \\ \text{donc } 2S &= (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1) \\ \text{Donc } 2S &= n(n+1) \Leftrightarrow S = \frac{(1+n)n}{2}. \end{aligned}$$

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique et n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$.
Alors :

$$\sum_{i=p}^{n} u_i = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{(u_p + u_n)(n-p+1)}{2}.$$

En particulier, en posant $p = 0$, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}.$$

Démonstration

Commençons par le second point.
Pour tout i on a $u_i = u_0 + ir$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} u_i &= u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n = u_0 + (u_0 + r) + \ldots + (u_0 + (n-1)r) + (u_0 + nr) \\ &= (n+1)u_0 + r(1 + \ldots + n) = (n+1)u_0 + r\left(\frac{(1+n)n}{2}\right) \text{ d'après le lemme} \\ &= \frac{2(n+1)u_0 + r(1+n)n}{2} = \frac{(n+1)(2u_0 + nr)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(u_0 + u_0 + nr)}{2} = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2} \text{ car } u_0 + nr = u_n. \end{aligned}$$

Passons au premier point.

$$\begin{aligned} \sum_{i=p}^{n} u_i &= u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = u_p + (u_p + r) + \ldots + (u_p + (n-p)r) \\ &= (n-p+1)u_p + r(1 + \ldots + (n-p)) = \ldots \\ &= \frac{(n-p+1)(u_p + u_p + (n-p)r)}{2} = \frac{(u_p + u_n)(n-p+1)}{2}. \end{aligned}$$

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :
La somme S de termes consécutifs d'une suite arithmétique est :

$$S = \frac{(1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier}) \times (\text{nb de termes})}{2}.$$

1.2 Suites géométriques

1.2.1 Définition et premières propriétés

Définition

On appelle suite géométrique toute suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad \text{où } q \in \mathbb{R}.$$

q est appelé la raison de la suite géométrique.

Remarques

1. Si $q = 0$, tous les termes de la suite, hormis peut-être u_0, sont nuls. Si $u_0 = 0$, tous les termes de la suite sont nuls. En dehors de ces deux cas triviaux, inintéressants, tous les termes de la suite sont différents de zéro.
2. Pour démontrer quune suite est géométrique (en dehors des deux cas triviaux), il suffit de montrer que, pour tout n, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant. Cette constante sera alors la raison de la suite.

Exemples

— La suite constituée des montants des loyers correspondant au second contrat de lactivité est une suite géométrique définie par $u_0 = 200$ et $u_{n+1} = 1{,}02u_n$ (qui sarrête toutefois à $n = 36$).

— La suite définie par : pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2^n$ est géométrique.

$$\text{En effet } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2 \Leftrightarrow u_{n+1} = 2u_n \text{ (de raison 2).}$$

— La suite définie par : pour tout n, $u_n = n^2$ nest pas géométrique.

$$\text{En effet } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \neq \text{constante.}$$

On peut le voir encore plus facilement sur les premiers termes :

$$\frac{u_2}{u_1} = 4 \neq \frac{u_3}{u_2} = \frac{9}{4}.$$

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et raison q.
Alors, $\forall n$ et tout entier naturel p tel que $0 \leq p \leq n$, on a :

$$u_n = q^{\,n-p}\, u_p$$

Et en particulier, avec $p = 0$:

$$u_n = q^{\,n}\, u_0.$$

Remarque

Cette propriété est importante car elle transforme une suite géométrique, définie par récurrence $(u_{n+1} = f(u_n))$, en une suite définie explicitement $(u_n = f(n))$.

Démonstration

— Commençons par démontrer par récurrence le second point :

1. Pour $n = 0$, la formule est trivialement vraie : $u_0 = q^0 u_0$. De même pour $n = 1$: par définition de la suite, $u_1 = q^1 u_0$.
2. Si $u_n = q^n u_0$ alors $u_{n+1} = qu_n = q \times q^n u_0 = q^{n+1} u_0$.
3. (1) La propriété est vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$; (2) si elle est vraie pour n alors elle est vraie pour $n + 1$; (3) donc elle est vraie pour tout n.

— Démontrons alors le premier point : $q^{n-p} u_p = q^{n-p} \times q^p u_0 = q^n u_0 = u_n$.

1.2.2 Variations d'une suite géométrique

On ne s'intéresse, en première, qu'aux variations de suites géométriques de raison positive.

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \geq 0$.

Alors, si $u_0 > 0$:

— si $q = 0$, (u_n) est stationnaire pour $n \geq 1$;

— si $0 < q < 1$, (u_n) est strictement décroissante ;

— si $q = 1$, (u_n) est constante ;

— si $q > 1$, (u_n) est strictement croissante.

Remarque

Si $u_0 < 0$ les sens de variations sont inversés dans le cas $q > 1$ ou $0 < q < 1$. On l'admettra.

Démonstration

Hormis le dernier cas, trivial : pour tout $n \geq 0$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, ce qui donne le résultat.

1.2.3 Convergence dune suite géométrique

Propriété

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q telle que $u_0 > 0$. Alors :

— si $q < -1$, (u_n) est divergente ;

— si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$;

— si $q = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$;

— si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Remarque

Si $u_0 < 0$ et $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$. On ladmettra.

1.2.4 Somme de termes consécutifs dune suite géométrique

Pour obtenir ce résultat, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme

Soit $q \neq 0$ et $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$. Alors

$$S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Démonstration
Remarquons que $q \times S = q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1}$.

$$\text{Donc } S - qS = 1 - q^{n+1} \Leftrightarrow S(1-q) = 1 - q^{n+1} \text{ donc, pour } q \neq 1,\ S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Propriété
Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et n et p deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$. Alors :

$$\sum_{i=p}^{n} u_i = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

En particulier, en posant $p = 0$, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Démonstration
On ne démontrera que le second point.
Pour tout i on a $u_i = q^i u_0$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} u_i &= u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 + qu_0 + q^2 u_0 + \cdots + q^n u_0 \\ &= u_0(1 + q + \cdots + q^n) = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.\end{aligned}$$

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :
La somme S de termes consécutifs dune suite géométrique est :

$$S = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}.$$

2 Exercices et problèmes

2.1 Exercice 1

Pour chacune des suites données ci-dessous :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \qquad x_n = \frac{3^n}{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$
$$v_n = 5 - 2n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \qquad y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$
$$w_n = (n+1)^2 - n^2 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1. Calculer les trois premiers termes.
2. La suite est-elle géométrique ? arithmétique ?
3. Si elle est arithmétique ou géométrique :
   (a) calculer le terme de rang 100 ;
   (b) calculer la somme des termes jusquau rang 100.

2.2 Exercice 2

1. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 8$. On sait que $u_{100} = 650$. Que vaut u_0 ?
2. La suite (u_n) est arithmétique de raison r. On sait que $u_{50} = 406$ et $u_{100} = 806$.
   (a) Déterminer r et u_0.
   (b) Calculer $S = u_{50} + u_{51} + \ldots + u_{100}$.

2.3 Exercice 3

On considère une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $q = -2$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Calculer u_{20}.
3. Calculer la somme $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{20}$.

2.4 Exercice 4

1. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$. On sait que $u_8 = -1$. Que vaut u_0 ?
2. La suite (u_n) est géométrique de raison q. On sait que $u_4 = 10$ et $u_6 = 20$.
   (a) Déterminer q et u_0.
   (b) Calculer $S = u_{50} + u_{51} + \ldots + u_{100}$.

2.5 Exercice 5

1. Calculer les sommes suivantes :

   (a) $S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 998 + 999$ et $S_2 = 2006 + 2007 + \cdots + 9999$
   (b) $S_3 = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \cdots + 4096$
   (c) $S_4 = 1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 59049$ et $S_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 999$
   (d) $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{28}}$ et $B = 3 + 6 + 9 + \cdots + 99$

2. Lequel des deux nombres suivants est le plus grand ?

$$A = 2005(1 + 2 + 3 + \cdots + 2006)$$
$$B = 2006(1 + 2 + 3 + \cdots + 2005)$$

2.6 Problème 1

Jean est en train de lire un livre. En additionnant les numéros de toutes les pages quil a déjà lues, il obtient 351. En additionnant les numéros de toutes les pages quil lui reste à lire, il obtient 469.

1. À quelle page en est Jean ?
2. Combien de pages comporte ce livre ? On supposera que le livre commence à la page numéro 1.

2.7 Problème 2

On considère (u_n) et (v_n) définies, $\forall n \in \mathbb{N}$, par :$u_n = \dfrac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2}$ et $v_n = \dfrac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}$.

1. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.
2. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite arithmétique.
3. Exprimer la somme suivante en fonction de n : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

2.8 Problème 3

Un fournisseur fait une étude sur la fidélité de sa clientèle depuis lannée $n = 0$, où il y a eu 200 clients. Chaque année, sa clientèle est composée de 50% des clients de lannée précédente auxquels sajoutent 400 nouveaux clients.

1. Soit u_n le nombre de clients lannée n. Justifier que $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 400$, puis calculer u_1 à u_4.
2. La fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 0{,}5x + 400$ est représentée par la courbe $\mathcal{C}$ page suivante, ainsi que la première bissectrice déquation $y = x$. Construire la représentation en escalier de la suite (u_n).
3. (a) Déterminer par le calcul les coordonnées du point dintersection des deux droites.
   (b) Que laisse supposer cette représentation sur la limite de la suite (u_n) ?
4. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 800$.
   (a) Vérifier que $v_{n+1} = 0{,}5v_n$.
   (b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   (c) En déduire lexpression de v_n, puis celle de u_n, en fonction de n.
   (d) Étudier la limite de la suite (u_n). Que peut-on en déduire concernant le nombre de clients du fournisseur ?

4. Montrer que (c_n) est croissante.
5. Déterminer le nombre de mois nécessaires pour l’achat de la collection.

2.9 Problème 4

Une ville comprenait 300 000 habitants au premier janvier 1950. On estime que la ville accueille tous les ans 2% de nouveaux arrivants et a un taux annuel de natalité de 3%. On constate curieusement un nombre fixe de décès et de départ de 800 personnes par an. On veut déterminer à partir de quelle année la population de la ville sera supérieure au double de la population en 1950.

1. Quelle était la population estimée de la ville le premier janvier 1951 ?
2. On note p_n la population de la ville à lannée $1950 + n$. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. On pose $q_n = p_n 16000$.
   (a) Montrer que cette suite est une suite géométrique.
   (b) Exprimer q_n puis p_n en fonction de n.
4. Montrer que (p_n) est croissante.
5. Déterminer à partir de quelle année la population de la ville sera supérieure au double de la population en 1950.