Chapitre 6. Graphes et Matrices

Boulanger Yann

24 juin 2025

Table des matières

1 Histoire de la théorie des graphes

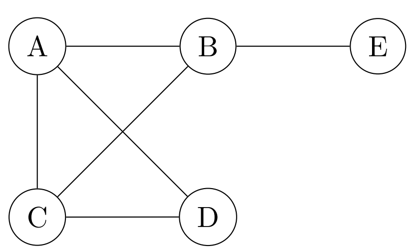
L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au XVIII^{e} siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg (les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ), la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloriage de cartes.

2 Les graphes

2.1 Vocabulaire et définitions

Définition 1
Un graphe est une représentation composée de **sommets** (des points) reliés par des **arcs**.

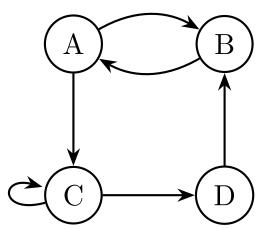
Exemple



Définition 2
Un graphe est dit **orienté** lorsque les arcs ont un sens de parcours.
Un **graphe orienté** est la donnée d'un ensemble S (sommets) et d'un ensemble $A \subset S \times S$ (arcs).

— Un **sommet isolé** n'est adjacent à aucun autre.
— Un arc (i, i) s'appelle une **boucle**.
— Pour un arc (i, j), i est l'**origine** et j l'**extrémité**.
— L'**ordre** du graphe est $|S|$ (nombre de sommets).
— Le **degré d'un sommet** est le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.
— Un graphe est dit **simple** si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet.

Exemple



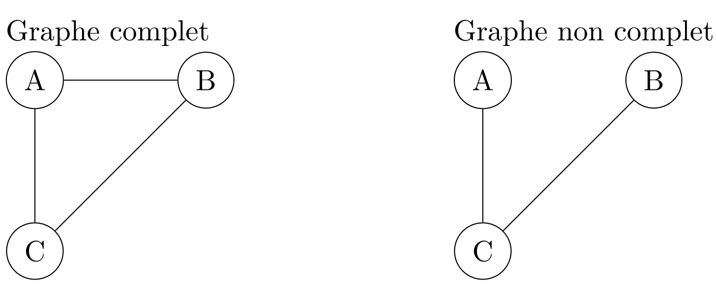
— l'arc (C, C) est une boucle ;
— l'arc (A, B) a pour origine A et pour extrémité B ;
— l'ordre du ce graphe est de 4.
— Le degré du sommet : A est 3, B est 3, C est 4 et D est 2.
— Ce graphe ne peut être qualifié de simple.

Propriété 1
La somme des degrés des sommets dans un graphe non orienté est égale au double du nombre d'arêtes.

Exemple
En reprenant le graphe de la définition 1, il y a 6 arêtes donc cette somme est de 12.

Définition 3
Deux sommets sont dits **adjacents** lorsqu'ils sont reliés par au moins une arête.
Un graphe est **complet** lorsque tous ses sommets sont deux à deux adjacents.

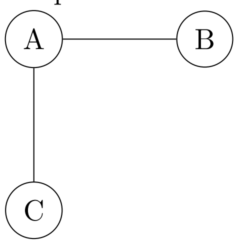
Exemple



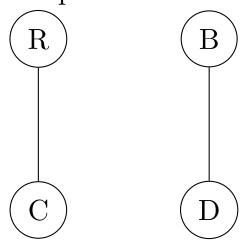
Définition 4
Un graphe non orienté est **connexe** lorsque chaque couple de sommets peut être relié par une chaîne.

Exemple

Graphe connexe



Graphe non connexe



Définition 5
Un **chemin** est une suite d'arcs $(s_1, s_2), (s_2, s_3), \dots, (s_{p-1}, s_p)$.

— Sa **longueur** est $p - 1$.
— Un chemin fermé est un **circuit**.
— Un chemin est **hamiltonien** s'il passe une fois par chaque sommet.

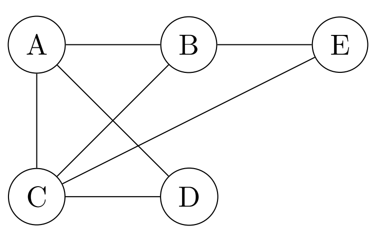
2.2 Graphes et matrices

Définition 6
Soit G un graphe non orienté d'ordre n. On numérote les sommets de G de 1 à n.
On appelle matrice d'adjacence associée à G la matrice A dont chaque terme $a_{(i,j)}$ est égal au nombre d'arêtes orientées (arcs) allant du sommet i vers le sommet j (pour tout $(i, j) \in [1; n]^2$).

Remarque

— Les boucles se retrouvent dans les éléments de la diagonales.
— Le degré d'un sommet est la somme des éléments de sa ligne et de sa colonne.

Exemple



Matrice d'adjacence associée :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 1
Soit A la matrice associée à un graphe et soit p un entier > 1 et A^P est la puissance p-ième de A. L'élément p_{ij} de la matrice A^P est égal au nombre de chaînes de longueur p reliant les sommets i à j.

Exemple
Soit un graphe représenté par la matrice M :

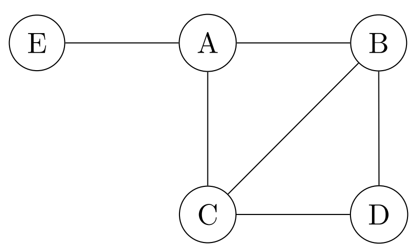
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Vérifier que : } M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

On en déduit par exemple qu'il y a deux chaînes de longueur 2 allant de E vers A.

Définition 7
Considérons un graphe non orienté.

- Une **chaîne** est une succession d'arêtes telle que l'extrémité de chacune (sauf la dernière) est l'origine de la suivante.
- Le nombre d'arêtes qui composent une chaîne est appelé la **longueur** de la chaîne.
- Une **chaîne fermée** est une chaîne dont l'origine et l'extrémité coïncident.
- Un **cycle** est une chaîne fermée dont les arêtes sont toutes distinctes.

Exemple
Dans le graphe ci-contre :



- E – A – C – B – D est une chaîne de longueur 4.
- E – A – B – C – A – E est une chaîne fermée de longueur 5.
  Ce n'est pas un cycle car l'arête entre A et E est parcourue deux fois.
- D – B – A – C – D est un cycle de longueur 4.

Remarque
L'arête E - A est appelé un isthme, sa suppression déconnecte le graphe.

Fin de chapitre