

CORRIGÉ EXERCICE 1**1. Calculs matriciels :**(a) $3A - 2B + C$:

$$3A = 3 \times \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 9 & 33 \end{pmatrix}$$

$$2B = 2 \times \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -8 & 24 \end{pmatrix}$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 9 & 33 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -8 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 27 \\ 17 & 9 \end{pmatrix}$$

$$3A - 2B + C = \begin{pmatrix} 4 & 27 \\ 17 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 25 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}}$$

(b) $(C + I_2)(C - I_2)$:

$$C + I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C - I_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (C + I_2)(C - I_2) &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \times (-2) + (-2) \times 1 & 0 \times (-2) + (-2) \times 2 \\ 1 \times (-2) + 4 \times 1 & 1 \times (-2) + 4 \times 2 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

(c) **[BONUS]** Produit $D \times E$:

$$\begin{aligned} D \times E &= \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 1+i & 0 & -i \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -i & 1-i & 1 \\ 0 & 1+i & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 2 + i \times (-i) + (-1) \times 0 & 1 \times 0 + i \times (1-i) + (-1) \times (1+i) & 1 \times (-1) + i \times 1 + (-1) \times i \\ (1+i) \times 2 + 0 \times (-i) + (-i) \times 0 & (1+i) \times 0 + 0 \times (1-i) + (-i) \times (1+i) & (1+i) \times (-1) + 0 \times 1 + (-i) \times i \\ 0 \times 2 + 1 \times (-i) + i \times 0 & 0 \times 0 + 1 \times (1-i) + i \times (1+i) & 0 \times (-1) + 1 \times 1 + i \times i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+1+0 & 0+i(1-i)-(1+i) & -1+i-i \\ 2(1+i)+0+0 & 0+0-i(1+i) & -(1+i)+0+1 \\ 0-i+0 & 0+(1-i)+i(1+i) & 0+1-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & i-i^2-1-i & -1 \\ 2+2i & -i-i^2 & -1-i+1 \\ -i & 1-i+i+i^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & i-(-1)-1-i & -1 \\ 2+2i & -i-(-1) & -i \\ -i & 1-i+i+(-1) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2+2i & 1-i & -i \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

2. Inverses des matrices :

Pour une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $\det(M) = ad - bc$. Si $\det(M) \neq 0$, alors M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

- Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$: $\det(A) = 2 \times 11 - 7 \times 3 = 22 - 21 = 1 \neq 0$, donc A est inversible.

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 11 & -7 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}$$

- Pour $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$: $\det(B) = 1 \times 12 - (-3) \times (-4) = 12 - 12 = 0$, donc B n'est pas inversible.
- Pour $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$: $\det(C) = (-1) \times 3 - (-2) \times 1 = -3 + 2 = -1 \neq 0$, donc C est inversible.

$$C^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

CORRIGÉ EXERCICE 2**1. Calcul de A^2 et A^3 :**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^2 &= A \times A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-2) \times (-3) + (-6) \times 2 & 1 \times (-2) + (-2) \times 2 + (-6) \times 0 & 1 \times (-6) + (-2) \times 9 + (-6) \times (-3) \\ -3 \times 1 + 2 \times (-3) + 9 \times 2 & -3 \times (-2) + 2 \times 2 + 9 \times 0 & -3 \times (-6) + 2 \times 9 + 9 \times (-3) \\ 2 \times 1 + 0 \times (-3) + (-3) \times 2 & 2 \times (-2) + 0 \times 2 + (-3) \times 0 & 2 \times (-6) + 0 \times 9 + (-3) \times (-3) \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 \times A = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 9 & 10 & 9 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 \times 1 + (-6) \times (-3) + (-6) \times 2 & -5 \times (-2) + (-6) \times 2 + (-6) \times 0 & -5 \times (-6) + (-6) \times 9 + (-6) \times (-3) \\ 9 \times 1 + 10 \times (-3) + 9 \times 2 & 9 \times (-2) + 10 \times 2 + 9 \times 0 & 9 \times (-6) + 10 \times 9 + 9 \times (-3) \\ -4 \times 1 + (-4) \times (-3) + (-3) \times 2 & -4 \times (-2) + (-4) \times 2 + (-3) \times 0 & -4 \times (-6) + (-4) \times 9 + (-3) \times (-3) \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

On remarque que $A^3 = A$.

2. Conjecture :

Puisque $A^3 = A$, on a $A^4 = A^2$, $A^5 = A^3 = A$, $A^6 = A^2$, etc.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on conjecture :

$$A^{2n+1} = A \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

3. Démonstration par récurrence :

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^{2 \times 0 + 1} = A^1 = A$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $A^{2n+1} = A$.

Alors :

$$A^{2(n+1)+1} = A^{2n+3} = A^{2n+1} \times A^2 = A \times A^2 = A^3$$

Or on a calculé $A^3 = A$, donc $A^{2(n+1)+1} = A$.

La propriété est donc héréditaire.

Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^{2n+1} = A$.

CORRIGÉ EXERCICE 3**1. Justification du système :**

La parabole $\mathcal{P}$ a pour équation $y = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

- Le sommet a pour coordonnées $(1; -4)$. L'abscisse du sommet est $x_S = -\frac{b}{2a} = 1$, donc :

$$-\frac{b}{2a} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -b = 2a \quad \Leftrightarrow \quad 2a + b = 0$$

De plus, le point $(1; -4)$ appartient à la parabole, donc :

$$a \times 1^2 + b \times 1 + c = -4 \quad \Leftrightarrow \quad a + b + c = -4$$

- La parabole coupe l'axe des abscisses en deux points dont l'un a pour abscisse -1 , donc $(-1; 0)$ appartient à la parabole :

$$a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a - b + c = 0$$

On obtient bien le système :

$$(S): \begin{cases} a + b + c = -4 \\ 2a + b = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases}$$

2. Écriture matricielle :

Le système (S) peut s'écrire sous la forme $MX = Y$ avec :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Résolution par les matrices :

Deux méthodes possibles.

La première est à maîtriser en terminale.

La deuxième est hors programme mais elle est détaillée pour les curieux.

Méthode 1 : Pivot de Gauss similaire à la résolution de système d'équation.

Méthode 2 : Comatrice et transposée de matrice.

On cherche à inverser la matrice M . Calculons d'abord son déterminant :

$$\begin{aligned}\det(M) &= 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (1 \times 1 - 0 \times (-1)) - 1 \times (2 \times 1 - 0 \times 1) + 1 \times (2 \times (-1) - 1 \times 1) \\ &= 1 \times 1 - 1 \times 2 + 1 \times (-2 - 1) \\ &= 1 - 2 - 3 = -4 \neq 0\end{aligned}$$

Calcul de la comatrice :

$$\text{Com}(M) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Transposée de la comatrice :

$$\text{Com}(M)^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Inverse de M :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \text{Com}(M)^T = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

La solution est $X = M^{-1}Y$:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \times (-4) + \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{4} \times 0 \\ \frac{1}{2} \times (-4) + 0 \times 0 + (-\frac{1}{2}) \times 0 \\ \frac{3}{4} \times (-4) + (-\frac{1}{2}) \times 0 + \frac{1}{4} \times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{a = 1, \quad b = -2, \quad c = -3}$$

4. Équation de la parabole :

L'équation de $\mathcal{P}$ est :

$$\boxed{y = x^2 - 2x - 3}$$

On peut vérifier :

- Sommet : $x_S = -\frac{-2}{2 \times 1} = 1$ et $y(1) = 1 - 2 - 3 = -4$
- Point d'intersection avec l'axe des abscisses : $(-1)^2 - 2 \times (-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$