Chapitre 7. Probabilité Conditionnelle. Cours.

Boulanger Yann

26 janvier 2026

Table des matières

1 Probabilité

Définition

On appelle loi de probabilité sur un ensemble Ω, la fonction p à valeur dans $[0;1]$ définie par les conditions suivantes :

1. $p(\Omega) = 1$
2. $p(\emptyset) = 0$
3. $p(e_1) + p(e_2) + \cdots + p(e_n) = \sum_{i=1}^{n} p(e_i) = 1$
4. Si A et B sont incompatibles alors $p(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) = p(\mathsf{A}) + p(\mathsf{B})$
5. Pour tous événements A et B, on a les relations :
   (a) $p(\overline{A}) = 1 - P(A)$
   (b) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Exemples :

1. On lance un dé truqué. Après un relevé statistique, on a pu déterminer que les probabilités d'apparition de chaque face sont telles que :

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) \quad \text{et} \quad p(6) = 3 \times p(1)$$

Calculer la probabilité d'apparition de chaque face
Il n'y a que deux probabilités à déterminer : $p(1)$ et $p(6)$. On a :

$$p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1 \Leftrightarrow 5p(1) + 3p(1) = 1 \Leftrightarrow 8p(1) = 1$$

On obtient donc : $p(1) = \frac{1}{8}$ et $p(6) = \frac{3}{8}$

2. À l'aide des probabilités suivantes sur les événements A et B, calculer $p(\overline{B})$

$$p(A) = 0,3,\ p(A \cup B) = 0,7 \text{ et } p(A \cap B) = 0,2$$

On calcule d'abord $P(\mathbf{B})$:

$$p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \quad \Leftrightarrow \quad p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) - p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

On obtient alors : $p(\mathrm{B}) = 0,7 - 0,3 + 0,2 = 0,6$
On calcule ensuite : $p(\overline{\mathbf{B}}) = 1 - p(\mathbf{B}) = 1 - 0,6 = 0,4$

1.1 Loi équiprobable

Définition 5

Une loi de probabilité est équiprobable si chaque événement élémentaire e_i a la même probabilité d'apparition.

$$\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} : \quad \forall i \in (1, 2, \ldots, n) \quad \text{on a} : p(e_i) = \frac{1}{n}.$$

Exemple : Pour un dé équilibré, chaque face a une probabilité de $\frac{1}{6}$ d'apparition.

2 Loi de Probabilité

Théorème 1

Dans une loi équiprobable, la probabilité de l'événement A vérifie :

$$p(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de }\Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables à A}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Remarque :
Lorsque la loi de probabilité est équiprobable, le calcul de probabilités revient à un problème de dénombrement. On peut alors utiliser pour dénombrer les différents cas, un arbre, un tableau double entrée, un diagramme de Venn, une liste,...

Historiquement l'équiprobabilité a été le seul cas envisagé. Cependant le paradoxe du duc de Toscane montre que ce n'est pas toujours le cas.

Exemple :
Une urne contient 6 boules : 4 rouges (numérotées de 1 à 4) et 2 bleues (numérotées 5 et 6).
On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne et on note sa couleur.

Calculer la probabilité des événements suivants :

— R : "tirer deux boules rouges"

— C : "tirer deux boules de même couleur"

On numérote les boules pour se retrouver dans un cas d'équiprobabilité. En effet comme il n'y a pas le même nombre de boules rouge et de boules bleues, la probabilité de tirer une boule rouge n'est pas la même que de tirer une boule bleue.
On établit la liste des tirages possibles. On cherche ici des paires (pas d'ordre).

$\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\}$	5 choix
$\{2,3\},\{2,4\},\{1,5\},\{2,6\}$	4 choix
$\{3,4\},\{3,5\},\{3,6\}$	3 choix
$\{4,5\},\{4,6\}$	2 choix
$\{5,6\}$	1 choix
	$=$ 15 tirages possibles

Pour avoir R il ne faut utiliser que les numéros de 1 à 4.
Il y a donc : $3+2+1=6$ choix. On a donc : $p(\mathrm{R}) = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$
Soit B : " obtenir deux boules bleues ".
Il n'y a qu'un choix possible, donc $p(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{15}$

$$\text{On a alors : } p(\mathrm{C}) = p(\mathrm{R}\cup\mathrm{B}) = p(\mathrm{R}) + p(\mathrm{B}) = \frac{6}{15} + \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$$

3 Probabilité conditionnelle

3.1 Définition

Le but est d'étudier la probabilité d'un événement B conditionné par un événement A.

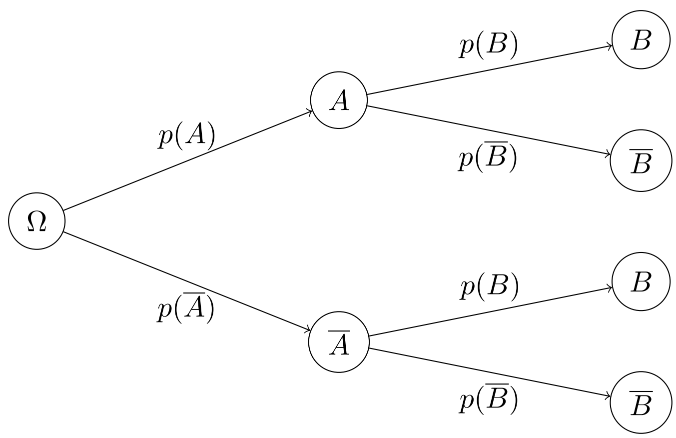
Définition 6

Lorsque $p(\mathrm{A}) \neq 0$, on note $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ la probabilité d'avoir l'événement B sachant que l'événement A est réalisé. On a alors la relation suivante :

$$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{p(\mathrm{A})}$$

3.2 Représentation par un arbre pondéré

Soient deux événements A et B. On peut représenter par un arbre pondéré les probabilités suivantes lorsque l'on connaît les probabilités de B ou B lorsque A est réalisé.



Exemple

Dans un lycée 54 % des élèves sont des filles dont 72 % sont externes. De plus, 76 % des garçons sont externes. On choisit un élève au hasard.

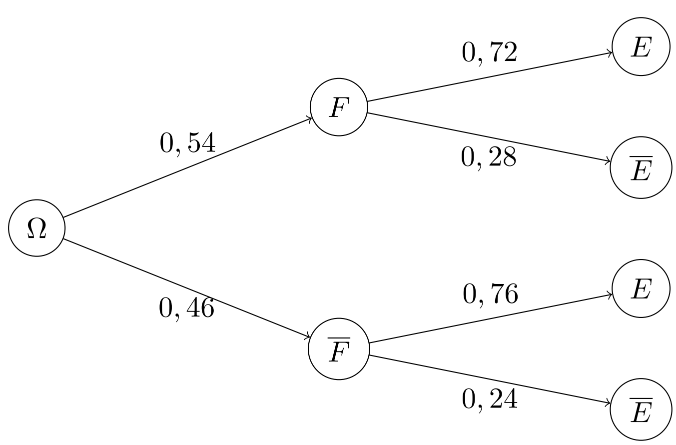
On pose :

— F : " l'élève choisi est une fille ".

— E : " l'élève choisi est externe ".

On traduit les données à l'aide de probabilités : $p(\mathrm{F}) = 0,54, \quad p_{\mathrm{F}}(\mathrm{E}) = 0,72, \quad p_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{E}) = 0,76$

On obtient alors l'arbre ci- contre :



Propriété

Pour remplir et utiliser un arbre, on a les propriétés suivantes :

— Sur chaque branche de l'arbre, on écrit les probabilités correspondantes (attention pas de pourcentage).

— La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nud est égale à 1 (loi des noeuds).

— Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
Par exemple la probabilité d'avoir une fille externe : $p(\mathrm{F}) \times p_{\mathrm{F}}(\mathrm{E}) = p(\mathrm{F} \cap \mathrm{E}) = 0,54 \times 0,72 = 0,3888$

— La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à cet événement. La probabilité d'avoir un élève externe :
$p(\mathrm{E}) = p(\mathrm{F} \cap \mathrm{E}) + p(\overline{\mathrm{F}} \cap \mathrm{E}) = p(\mathrm{F}) \times p_{\mathrm{F}}(\mathrm{E}) + p(\overline{\mathrm{F}}) \times p_{\overline{\mathrm{F}}}(\mathrm{E}) = 0,54 \times 0,72 + 0,46 \times 0,76 = 0,7384$

Autre exemple :
Dans un atelier, il y a 2% de pièces défectueuses. On effectue un test pour savoir si on doit accepter ou refuser une pièce. On a observé que :

— Si la pièce est n'est pas défectueuse, elle est acceptée par ce test à 96% .

— Si la pièce est défectueuse, elle est refusée par ce test à 97% .

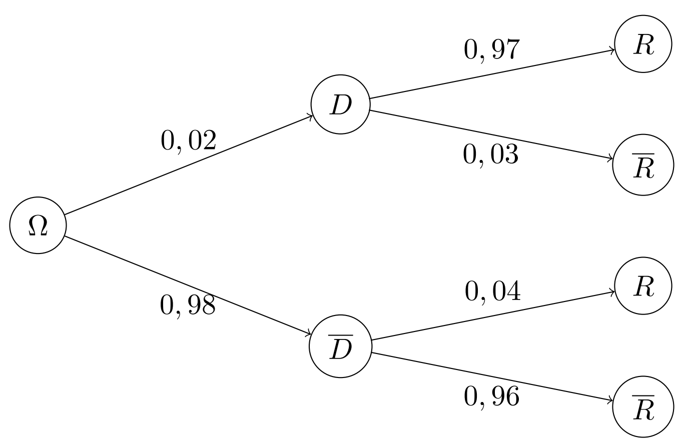
Quel est le pourcentage de retour client ?

On appelle les événement suivants :

— D : la pièce est défectueuse.

— R : la pièce est refusée.

On construit l'arbre ci- contre



Retour client : probabilité qu'une pièce soit défectueuse et acceptée :

$$p(\mathrm{D} \cap \overline{\mathrm{R}}) = p(\mathrm{D}) \times p_{\mathrm{D}}(\overline{\mathrm{R}}) = 0,02 \times 0,03 = 0,0006$$

On peut s'attendre à $0,06\%$ de retour client.

3.2.1 Probabilités totales

Théorème 2

Soit A_1, A_2, ... A_n une partition de l'univers Ω (ensembles deux à deux incompatibles et dont l'union forme Ω), alors, pour tout événement B, on a :

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B)$$

Par exemple pour une partition de Ω en trois ensembles : A_1, A_2 et A_3. On a alors :

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + p(A_3 \cap B).$$

Remarque

Dans la plupart des cas, on utilise la partition A et $\overline{A}$. Dans un arbre, le nombre n d'ensembles formant une partition donne le nombre de branches issues d'un noeud.

3.3 Événements indépendants

Définition 7
Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si :

$$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B}) \quad \text{ou lorsque } p(\mathrm{A}) \neq 0 \quad p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B})$$

Exemple
Une association de 96 membres propose différentes activités à ses adhérents dont l'aviron et le badminton. 12 membres s'inscrivent pour l'aviron, 32 pour le badminton dont 4 pour les deux.
On prend au hasard la fiche d'un adhérent.

On note A et B les événements :

— A : "l'adherent est inscrit pour l'aviron".

— B : "l'adherent est inscrit pour le badminton".

Les événements A et B sont-ils indépendants ? En est-il de même pour A et $\overline{\mathbf{B}}$?

On peut représenter les événements dans un tableau double entrée ci-dessous :

On calcule les probabilités suivantes :

$$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{4}{96} = \frac{1}{24}$$

$$p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B}) = \frac{12}{96} \times \frac{32}{96} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{24}$$

$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) \times p(\mathrm{B})$, les événements A et B sont donc indépendants.
De même : $p(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \frac{8}{96} = \frac{1}{12}$ et $p(\mathrm{A}) \times p(\overline{\mathrm{B}}) = \frac{12}{96} \times \frac{64}{96} = \frac{1}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$ $p(\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) = p(\mathrm{A}) \times p(\overline{\mathrm{B}})$.
Les événements A et $\overline{\mathbf{B}}$ sont donc indépendants.

Remarque
On peut montrer que si A et B sont indépendants, alors il en est de même pour :
($\overline{\mathrm{A}}$et$\overline{\mathrm{B}}$), (A et $\overline{\mathrm{B}}$) et ($\overline{\mathrm{A}}$et$\overline{\mathrm{B}}$)

Autre exemple
On lance deux fois de suite un dé bien équilibré. Justifier que les deux lancers sont des épreuves indépendantes.

Deux lancers de dé peut être assimilé à un tirage avec remise. À chaque lancer, l'ensemble des six valeurs sont remises en jeu sans interaction avec le lancer précédent. Ainsi on a autant de chance de faire un "6" au deuxième lancer quelque soit le résultat du premier.