Chapitre 6. Nombre Dérivé. Cours.

Boulanger Yann

28 décembre 2025

Table des matières

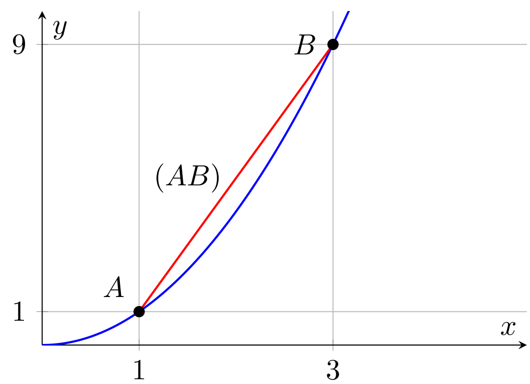
1 Taux de variation d'une fonction entre deux réels

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels distincts de I.
Le **taux de variation (ou taux d'accroissement)** de f entre a et b est le nombre réel égal à :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Graphiquement : la droite (AB) sécante à la courbe C_f a pour **coefficient directeur** (ou **pente**) le taux de variation $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
En effet, on a : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.



Exemple 1
Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
Exprimer le taux de variation de f entre a et b deux réels distincts :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{mb+p-(ma+p)}{b-a} = \frac{mb+p-ma-p}{b-a} = \frac{m(b-a)}{b-a} = m$$

Exemple 2 :
Soit f la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Calculer le taux de variation de f entre 1 et 3 : $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{9-1}{2} = \frac{8}{2} = 4$.
2. Calculer le taux de variation de f entre -2 et -1 : $\frac{f(-2)-f(-1)}{-2-(-1)} = \frac{4-1}{-2+1} = \frac{3}{-1} = -3$.

Propriété Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et a et b deux réels distincts de I.

- Si f est **croissante** sur I, alors le taux de variation de f entre a et b est **positif**.
- Si f est **décroissante** sur I, alors le taux de variation de f entre a et b est **négatif**.

Remarque : Les réciproques des propriétés précédentes sont fausses.
Contre-exemple : avec f la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$
Calculer le taux de variation de f entre -1 et 2 :

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{4-1}{2+1} = \frac{3}{3} = 1$$

Ce taux de variation est positif or la fonction f n'est pas croissante sur $[-1; 2]$.

2 Nombre Dérivé d'une Fonction en un point

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Soient a un réel de I et h un réel non nul tel que $a+h \in I$.
On dit que f est dérivable en a lorsque le taux de variation de f entre a et $a+h$ tend vers un unique nombre réel lorsque h tend vers 0.
Ce nombre limite est appelé **nombre dérivé de f en** a, et on le note $f'(a)$.
On écrit :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

Exemples :

1. Soit f la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Déterminer $f'(4)$.
   Le taux de variation de f entre 4 et $4+h$ est :
   $$\frac{f(4+h)-f(4)}{4+h-4} = \frac{(4+h)^2-4^2}{h} = \frac{16+8h+h^2-16}{h} = \frac{h(h+8)}{h} = 8+h$$
   Lorsque h tend vers 0, le taux de variation $8+h$ tend vers 8.
   Ainsi :
   $$\lim_{h \to 0}(8+h) = 8$$
   Cette limite est finie alors la fonction carré est dérivable en 4 et le nombre dérivé de f en 4 est 8, on note $f'(4) = 8$.

2. Soit g la fonction inverse définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Déterminer $g'(2)$.
   Le taux de variation de g entre 2 et $2+h$ est :
   $$\begin{aligned} \frac{g(2+h)-g(2)}{2+h-2} &= \frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h} \\ &= \frac{2-(2+h)}{h \cdot 2(2+h)} \\ &= \frac{-h}{2h(2+h)} \\ &= \frac{-1}{2(2+h)} \end{aligned}$$
   Lorsque h tend vers 0, le taux de variation $\dfrac{-1}{2(2+h)}$ tend vers $-\dfrac{1}{4}$.
   Ainsi :
   $$\lim_{h \to 0} \frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}$$
   Cette limite est finie alors la fonction inverse est dérivable en 2 et le nombre dérivé de g en 2 est $-\dfrac{1}{4}$, on note $g'(2) = -\dfrac{1}{4}$.

Remarques :

— $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se lit ń limite, lorsque h tend vers 0, de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ż.

— Une fonction peut ne pas être dérivable en un réel a, par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

3 Tangente à une courbe en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soient a un réel de I et h un réel non nul tel que $a + h \in I$.
Soit A le point de la courbe représentative de f d'abscisse a.
Soit M le point de la courbe représentative de f d'abscisse $a + h$.
Lorsque h tend vers 0, le point M se rapproche du point A et la sécante (AM) de coefficient directeur $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se rapproche d'une position limite.
Si f est dérivable en a, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ lorsque h tend vers 0.
On admet alors que ce nombre dérivé est le coefficient directeur de la droite, qui correspond à la position limite de (AM).

Définition

Soient f une fonction dérivable en un réel a et A le point de coordonnées $A(a; f(a))$.
La **tangente à la courbe** représentative de f au point d'abscisse a est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété

L'équation réduite de la **tangente à la courbe** représentative de f au point $A(a; f(a))$ est :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a).$$

Démonstration :
On écrit l'équation réduite $y = mx + p$ de la tangente qui a pour coefficient directeur $f'(a) = m$.
Alors l'équation réduite s'écrit : $y = f'(a) \times x + p$
Cette tangente passe par le point $A(a; f(a))$ alors les coordonnées du point A vérifient l'équation réduite : $f(a) = f'(a) \times a + p \iff p = f(a) - f'(a) \times a$.
Finalement l'équation réduite est : $y = f'(a) \times x + f(a) - f'(a) \times a$.
Donc : $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$.

Exemple :
Soit f la fonction carré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Déterminer l'équation de la tangente (T) à la parabole au point d'abscisse 4.
L'équation de (T) est de la forme : $y = f'(4) \times (x - 4) + f(4)$.
D'après l'exemple a) de la partie 2), on sait que $f'(4) = 8$ et calculons : $f(4) = 4^2 = 16$.
On obtient : $y = 8(x - 4) + 16 = 8x - 32 + 16$ donc $y = 8x - 16$

Cas particulier :
Lorsque le **nombre dérivé** d'une fonction f est **nul** en un réel a, alors la **tangente** à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est parallèle à l'axe des abscisses, on dit alors que la tangente est horizontale. L'équation réduite de la tangente est alors $y = f(a)$.