Chapitre 5. Nombres Complexes
point de vue géométrique
Exercices

Boulanger Yann

23 juin 2025

Table des matières

1 Exercice 1

Calculer le module de chacun des nombres suivants :

1. $z_1 = 2 - i$
2. $z_2 = 3 + 4i$
3. $z_3 = 7 - i$
4. $z_4 = -4 + 3i$
5. $z_5 = \sqrt{7} + i\sqrt{5}$
6. $z_6 = (1 + i)^4$
7. $z_7 = (-3 + 5i)^2$
8. $z_8 = (1 - \sqrt{3}i)(\sqrt{11} - 5i)$
9. $z_9 = \dfrac{4 - 3i}{3 - 4i}$

2 Exercice 2

Donner la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$
2. $z_2 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$
3. $z_3 = 4 - 4i$
4. $z_4 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{i\sqrt{3}}{4}$
5. $z_5 = -2i$
6. $z_6 = \dfrac{4}{1 - i}$

3 Exercice 3

Déterminer un argument de chacun des nombres complexes donnés :

1. $z_1 = -1 + i$
2. $z_2 = i$
3. $z_3 = \dfrac{\sqrt{6} + i}{2}$
4. $z_4 = \dfrac{|2 + 2|}{|1 - i|}$
5. $z_5 = \dfrac{i}{\dfrac{\sqrt{6} - i}{2}}$
6. $z_6 = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2i}$

4 Exercice 4

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$

1. Donner le module et un argument de z_1, z_2 et $\dfrac{z_1}{z_2}$.
2. Donner la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$.
3. En déduire que : $\cos \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin \dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

5 Exercice 5

Donner une forme exponentielle de chacun des complexes suivants :

1. $z_1 = 2\sqrt{3} + 6i$
2. $z_2 = (1 + i\sqrt{3})^4$
3. $z_3 = 2\left(\cos \dfrac{\pi}{5} - i \sin \dfrac{\pi}{5}\right)$

6 Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, écrire z sous la forme exponentielle et en déduire la forme algébrique de $\bar{z}$ et $\dfrac{1}{z}$

1. $z_1 = \dfrac{6}{1 + i}$
2. $z_2 = 3ie^{i\frac{\pi}{3}}$
3. $z_3 = -12e^{i\frac{\pi}{4}}$
4. $z_4 = \dfrac{\sin \frac{\pi}{12} - i \cos \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}}$
5. $z_5 = \left(3 + i\sqrt{3}\right)^4$
6. $z_6 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}$

7 Exercice 7

1. (a) Exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$ à l'aide de la formule de Moivre et du développement de $(a + b)^3$.
   (b) En déduire que : $\cos^3 x = \dfrac{3\cos x + \cos 3x}{4}$ et $\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$.
2. Retrouver ces deux formules à l'aide des formules d'Euler.

8 Exercice 8

Déterminer et construire les ensembles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 des points dont l'affixe z vérifie la condition proposée.

1. $z = 3e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in [0; 2\pi[$
2. $z = re^{i\frac{\pi}{4}}$ avec $r \in [0; +\infty[$
3. $z = ke^{-i\frac{\pi}{3}}$ avec $k \in \mathbb{R}$

9 Exercice 9

A et B ont pour affixes respectives 1 et 3 + 2i. Déterminer puis construire les ensembles Γ_1 et Γ_2, ensemble des points M dont l'affixe z satisfait les conditions suivantes :

1. $|z - 1| = |z - (3 + 2i)|$
2. $|z - (3 + 2i)| = 1$

10 Exercice 10

Soit les points A(a), B(b) et C(c) tels que : $a = 1 + \frac{3}{4}i$, $b = 2 - \frac{5}{4}i$, $c = 3 + \frac{7}{4}i$.

1. Placer les points A, B et C.
2. Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Calculer l'affixe de A' tel que ABA'C soit un carré.

11 Exercice 11

Soit le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct(O, $\vec{u}, \vec{v}$). Soit les points A(a), B(b) et C(c) tels que : $a = -2 + 2i$, $b = -3 - 6i$ et $c = 1$.
Quelle est la nature du triangle ABC ?

12 Exercice 12

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, $\vec{u}, \vec{v}$).
Soit f l'application définie dans $\mathbb{C} \backslash \{-2i\}$ par : $f(z) = \dfrac{z - 2 + i}{z + 2i}$.

1. On pose $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de x et de y puis montrer que :

$$Re[f(z)] = \frac{x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2}{x^2 + (y + 2)^2} \quad \text{et} \quad Im[f(z)] = \frac{-x + 2y + 4}{x^2 + (y + 2)^2}$$

   $\triangle$ Soyez patient et méthodique !
2. En déduire la nature de :
   (a) l'ensemble E des points M d'affixe z du plan, tels que $f(z)$ soit un réel ;
   (b) l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur ou éventuellement nul.
   (c) Représenter ces deux ensembles.

13 Exercice 13

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}, \vec{v}$). Soit le point A d'affixe 1 + i. À tout point M(z) avec $z \neq 0$, on associe le point M'(z') tel que : $z' = \dfrac{z-1-i}{z}$ Le point M' est appelé le point image du point M.

1. (a) Déterminer l'affixe du point B', image du point B(i).
   (b) Montrer que, pour tout point M(z) avec $z \neq 0$, l'affixe z' du point M' est telle que $z' \neq 1$.
2. Déterminer l'ensemble des points M(z) avec $z \neq 0$ tel que l'affixe du point M' est telle que $|z'| = 1$.
3. Quel est l'ensemble des points M(z) avec $z \neq 0$ tel que l'affixe du point M' est un nombre réel ?

14 Exercice 14

Soit le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}, \vec{v}$). L'unité graphique est 1 cm. On réalisera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.
Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = 2-3i$, $z_B = i$ et $z_C = 6-i$.
Partie A

1. Calculer $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$
2. En déduire la nature du triangle ABC.

Partie B On considère l'application f qui, au point M(z) avec $z \neq i$, associe le point M'(z') telle que :

$$z' = \frac{i(z-2+3i)}{z-i}$$

1. Soit $D(1-i)$. Déterminer l'affixe du point D' image du point D par f.
2. (a) Montrer qu'il existe un unique point, noté E, dont l'image par f est le point d'affixe $2i$.
   (b) Démontrer que E est un point de la droite (AB).
3. Démontrer que, pour tout point M distinct de B, $OM' = \frac{AM}{BM'}$.
4. Démontrer que, pour tout point M distinct de A et du point B, on a l'égalité : $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) + \dfrac{\pi}{2}$ modulo 2π.
5. Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
6. Démontrer que si le point M' appartient à l'axe des imaginaires purs, privé du point B, alors le point M appartient à la droite (AB).

15 Exercice 15

Soit le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. L'unité graphique est 2 cm. On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice. Soit les points $A(1)$ et $B(-1)$. Soit l'application f qui, à tout point M(z) distinct de B, associe le point $M'(z')$ telle que :

$$z' = \frac{z-1}{z+1}$$

1. Déterminer les points invariants M de f, tels que $M = f(M)$.
2. (a) Montrer que pour $z \neq -1$: $(z'-1)(z+1) = -2$.

(b) En déduire pour $z \neq -1$ une relation entre : $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre $\arg(z'-1)$ et $\arg(z+1)$. Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.

3. Montrer que si M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de centre A et de rayon 1.
4. Soit le point P d'affixe $p = -2 + i\sqrt{3}$.
   (a) Déterminer la forme exponentielle de $(p+1)$.
   (b) Montrer que le point P appartient au cercle $\mathcal{C}$.
   (c) Soit Q le point d'affixe $q = -\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p. Montrer que les points A, P' et Q sont alignés dans cet ordre.
   (d) En utilisant les questions précédentes, proposer une construction à la règle et au compas de l'image P' du point P par l'application f.

16 Exercice 16

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit A(2 – 5i) et B(7 – 3i).
   Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.
2. Soit (A) l'ensemble des points M d'affixe z telle que : $|z-i| = |z+2i|$.
   Proposition 2 : (A) est une droite parallèle à l'axe des réels.
3. Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$.
   Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.
4. Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 4 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|i+z| = 1 + |z|$.
5. Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 5 : Si $z \in U$ alors $z^2 + \dfrac{1}{z^2} \in \mathbb{R}$.

17 Exercice 17

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. **Proposition 1** : Pour tout entier naturel n : $(1+i)^{4n} = (-4)^n$.
2. Soit (E) l'équation $(z-4)(z^2-4z+8) = 0$ où $z \in C$.
   Proposition 2 : Les points dont les affixes sont les solutions, dans C, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.
3. **Proposition 3** : Pour tout nombre réel α, $1 + e^{2i\alpha} = 2e^{i\alpha}\cos(\alpha)$.
4. Soit A le point d'affixe $z_A = \dfrac{1}{2}(1+i)$ et M_n le point d'affixe $(z_A)^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Proposition 4 : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.
5. Soit $j \in U$, d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.
   Proposition 5 : On a l'égalité : $1 + j + j^2 = 0$.

18 Exercice 18

Soit la suite (z_n) définie dans C par : $z_0 = \sqrt{3} - i$ et $z_{n+1} = (1+i)z_n$.
Partie A Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0.
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.
2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1+i$. En déduire la forme exponentielle de z_1.
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

19 Exercice 19

On définit la suite (z_n) sur C par :

$$\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On note r_n le module du terme z_n : $r_n = |z_n|$. Dans le plan complexe d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. (a) Calculer z_1, z_2 et z_3.
   (b) Placer les points A_1 et A_2 sur le graphique.
   (c) Écrire le nombre complexe $\dfrac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.
   (d) Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1.
2. (a) Démontrer que la suite (r_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) La suite (r_n) est-elle convergente ? Interpréter géométriquement ce résultat.
3. On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc.

$$\text{Ainsi } L_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n.$$

   (a) Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.
   (b) Donner une expression de L_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).

Fin de chapitre