Chapitre 5. Nombres Complexes
point de vue géométrique

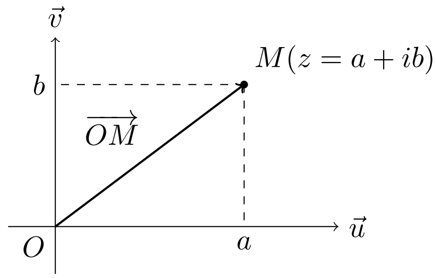
Boulanger Yann

23 juin 2025

Table des matières

1 Représentation d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on peut associer à z le point $M(a, b)$.
On dit que M est l'image de z.
Réciproquement, à tout point $M(a, b)$ du plan, on peut associer un unique complexe z, défini par $z = a + ib$, z est appelé affixe de M ; on dit aussi que z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.



2 Module et Argument

2.1 Module

Définition 1
Pour $z = a + \mathrm{i}b$, on définit $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\,\overline{z}} \in \mathbb{R}^+$.

Proposition 1
On a $|z| \geq 0$ avec égalité $\iff z = 0$.

Proposition 2
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \iff z \in \mathbb{R}^+$, $\quad |\operatorname{Im}(z)| \leq |z| \iff z \in \mathrm{i}\mathbb{R}^+$.

Proposition 3
Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,
- $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ [Inégalité triangulaire].

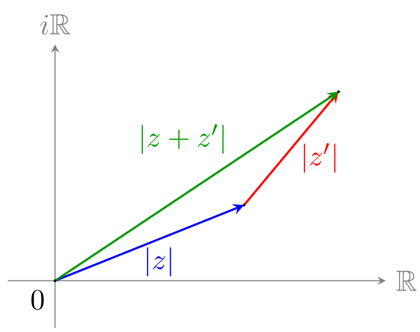


Figure 1 – Illustration géométrique de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$.

Exemple
Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales égale la somme des carrés des côtés. Si les longueurs des côtés sont notées L et l et les longueurs des diagonales sont D et d, alors :

$$D^2 + d^2 = 2l^2 + 2L^2$$

Démonstration
Considérons le parallélogramme de sommets $0, z, z'$ et $z + z'$. Alors :

$$D^2 + d^2 = |z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2 = 2l^2 + 2L^2$$

Mini-Exercices

1. Calculer $1 - 2i + \dfrac{i}{1-2i}$.
2. Écrire sous la forme $a + ib$ les nombres complexes $(1+i)^2$, $(1+i)^3$, $(1+i)^4$, $(1+i)^8$.
3. En déduire $1 + (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^7$.
4. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|1 + iz| = |1 - iz|$, montrer que $z \in \mathbb{R}$.
5. Montrer que si $|\operatorname{Re} z| \leq |\operatorname{Re} z'|$ et $|\operatorname{Im} z| \leq |\operatorname{Im} z'|$ alors $|z| \leq |z'|$, mais que la réciproque est fausse.
6. Montrer que $\dfrac{1}{\bar{z}} = \dfrac{z}{|z|^2}$ (pour $z \neq 0$).

2.2 Argument et Trigonométrie

Définition 2
Pour $z \neq 0$, tout réel θ tel que $z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ est un *argument* de z.
Si θ est un argument, alors $\theta + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ l'est aussi.

Remarque 1
On peut imposer à cet argument d'être unique si on rajoute la condition $\theta \in [-\pi, +\pi]$.
Alors l'argument est appelé **argument principal** et est noté $Arg(z)$.

Remarque 2

$$\theta \equiv \theta'[2\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \theta' + 2k\pi \iff \begin{cases} \cos\theta = \cos\theta' \\ \sin\theta = \sin\theta' \end{cases}$$

Proposition 4.
L'argument satisfait les propriétés suivantes :

— $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$

— $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)[2\pi]$

— $\arg(1/z) \equiv -\arg(z)[2\pi]$

— $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$

Démonstration.
$zz' = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)|z'|(\cos\theta' + i\sin\theta') = |zz'|(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'))$
$= |zz'|(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta'))$ donc $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$.
On en déduit les deux autres propriétés, dont la deuxième par récurrence.

2.3 Forme exponentielle

2.3.1 Définition

Définition 3

Écrite avec $r = |z| > 0$ et un argument θ, la **forme exponentielle** d'un complexe non nul est

$$z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \text{où} \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

Remarque :
On retrouve alors la célèbre formule liant des grands nombres des mathématiques : $e^{i\pi} + 1 = 0$.
Connu dans un premier temps par Roger Cotes, cette formule fût citée par Léonhard Euler dans son livre d'analyse de 1748 *Introductio in analysin infinitorum.*

Proposition 5

Pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}, \qquad |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| = 1, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\varphi)}.$$

Démonstration faite en cours.

Exemple

Soit $z = 1 + \mathrm{i}$. Alors $|z| = \sqrt{2}$ et un argument est $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, puisque $z = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}$.

2.3.2 Formules d'Euler

Formules d'Euler

$$cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Démonstration faite en cours.

3 Nombres complexes de module 1

3.1 Formule de de Moivre

Formule de de Moivre
$\forall\theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$,
$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$$

Démonstration faite en cours.

Exemples :
Cette formule permet d'exprimer $cos(nx)$ et $sin(nx)$ en puissance de $cos(x)$ et $sin(x)$.

- $cos(3x) = Re[(cos(3x) + isin(3x)] = Re[(cos(x) + isin(x))^3] = cos^3(x) - 3cos(x)sin(x)$;
- $sin(3x) = Im[(cos(3x) + isin(3x)] = Im[(cos(x) + isin(x))^3] = 3cos^2(x)sin(x) - sin^3(x)$.

Exercice : simplifier les résultats précédent en les exprimant uniquement avec cos ou sin.

3.2 Linéarisation de $cos^n(x)$ et $sin^n(x)$

La linéarisation consiste à écrire $cos^n(x)$ ou $sin^n(x)$ en une combinaison linéaire de $cos(kx)$ ou $sin(kx)$.
La linéarisation permet de trouver une primitive d'une fonction circulaire.
On utilise conjointement les formules d'Euler et la formule du binôme :

$$cos^n(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n, \qquad sin^n(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n.$$

Exemple : Linéariser $\cos^3 x$ et $\sin^3 x$ puis calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$.

$$\begin{aligned}\cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}\right)\\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2} + 3\times\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\\
&= \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}\right)\\
&= -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} - 3\times\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\\
&= -\frac{1}{4}(\sin 3x - 3\sin x) = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\sin x - \sin 3x)\,dx = \frac{1}{4}\left[-3\cos x + \frac{\cos 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{1}{4}\left(-0 + 0 + 3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

4 Racines n-ièmes de l'unité

Théorème 1

Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^n = 1$ est

$$U_n = \{\mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \{0, \dots, n-1\}\}.$$

Démonstration

Écrivons $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$. L'égalité $z^n = 1$ donne $r^n = 1 \Rightarrow r = 1$, et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = 1 \Rightarrow n\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$. D'où $\theta = \dfrac{2k\pi}{n}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$, et la restriction $0 \leq k < n$ fournit les n racines distinctes.

Principe

Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = c$, où $c = \rho e^{i\theta} \neq 0$, on se ramène au cas $c = 1$.
En effet, le nombre complexe $z_0 = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}}$ est une racine particulière de $\rho e^{i\theta}$.
On en déduit que :

$$z^n = c \Leftrightarrow z^n = (z_0)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{z_0} \in U_n.$$

Remarque : Géométriquement, les racines forment un polygone à n côtés.

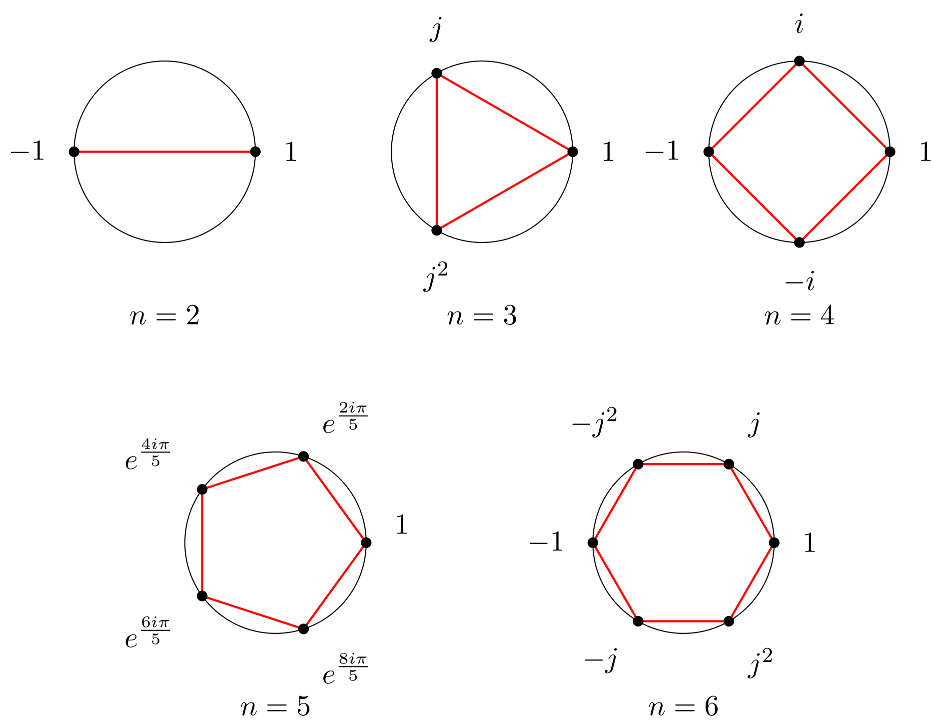


FIGURE 2 – Racines n-ième de l'unité avec polygones réguliers pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Exemples

— Résolution de $z^6 = -1$. On a $-1 = e^{i\pi}$, donc les solutions sont les $e^{\frac{i\pi}{6}}\omega^k$, avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{6}}$ et $0 \leq k \leq 5$.
Donc les racines 6-ième de -1 sont les $e^{i\theta}$, avec $\theta = \dfrac{(2k+1)\pi}{6}$, et $0 \leq k \leq 5$.

— Résolution de $z^4 = -4$.
On a $-4 = 4e^{i\pi}$, donc les solutions sont les $\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}i^k$, c'est-à-dire $1+i, -1+i, -1-i$ et $1-i$.

Fin de chapitre