Exercice 1

1. **Démonstration par récurrence :**
   Soit $\mathscr{P}_n$ l'assertion suivante : "$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$".
   - **Initialisation :** $u_0 = 2 > 1$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
   - **Hérédité :** Supposons $u_n > 1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
     On a : $u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n}$
     De plus : $u_{n+1} - 1 = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n} - 1 = \dfrac{1+3u_n-3-u_n}{3+u_n} = \dfrac{2(u_n-1)}{3+u_n} > 0$ car $u_n > 1$.
     Donc $u_{n+1} > 1$.
     $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie. Alors $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.
   - **Conclusion :** Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.
2. a. **Calcul :**

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1+3u_n}{3+u_n} - u_n \\ &= \frac{1+3u_n - u_n(3+u_n)}{3+u_n} \\ &= \frac{1+3u_n-3u_n-u_n^2}{3+u_n} \\ &= \frac{1-u_n^2}{3+u_n} \\ &= \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n} \end{aligned}$$

   b. **Sens de variation :**
   D'après la question précédente : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$
   Pour tout n, on a $u_n > 1$ (question 1), donc $1 - u_n < 0$.
   De plus, $1 + u_n > 0$ et $3 + u_n > 0$.
   Ainsi, $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout n, donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 2

1. **Construction :** Figure à réaliser avec un repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$
2. **Coplanérité :**
   On cherche à exprimer $\overrightarrow{AR}$ comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AQ}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{AQ} &= -\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{AR} &= \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AE} \end{aligned}$$

   On observe que $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$ car :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} &= (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) + (-\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE}) \\ &= \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AE} \\ &= \overrightarrow{AR} \end{aligned}$$

   Donc $\overrightarrow{AR}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{AP}$ et $\overrightarrow{AQ}$, ce qui prouve que les points A, P, Q et R sont coplanaires.

Exercice 3

1. **Alignement de I, M, L :**
   - $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$
   - $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KL} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

   Alors : $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{ML}$.
   Donc $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont colinéaires, donc I, M, L alignés.

2. **a.** On cherche a, b tels que $\overrightarrow{CL} = a\overrightarrow{JF} + b\overrightarrow{CI}$.
   - $\overrightarrow{JF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \iff a\overrightarrow{JF} = -\frac{a}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{a}{2}\overrightarrow{AE}$
   - $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \iff b\overrightarrow{CI} = -b\overrightarrow{AB} - \frac{b}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{b}{2}\overrightarrow{AE}$
   - $\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FK} + \overrightarrow{KL} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$

   Par identification on a : $\begin{cases} -\frac{1}{2}(a+b) = -\frac{3}{2} \\ -b = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(a+b) = \frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a+b = 3 \\ b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{5}{2} \end{cases}$

   Alors : $\overrightarrow{CL} = \frac{5}{2}\overrightarrow{JF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$

   b. Donc $\overrightarrow{CL}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{JF}$, donc ces trois vecteurs sont coplanaires.

3. **Coplanérité :**
   J est le milieux de $[CF]$ donc $\overrightarrow{JF} = \overrightarrow{CJ}$.
   Alors $\overrightarrow{CL} = \frac{5}{2}\overrightarrow{JF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CI} \iff \overrightarrow{CL} = \frac{5}{2}\overrightarrow{CJ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$
   Donc $\overrightarrow{CL}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CJ}$, donc ces trois vecteurs sont coplanaires.

4. **Conclusion :**
   Les points C, I, L et J sont coplanaires.

Exercice 4

1. - $u_n = (3n+1)(-7n+5) = -21n^2 + 15n - 7n + 5 = -21n^2 + 8n + 5$
     $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ (terme dominant $-21n^2$)
   - $v_n = \dfrac{n^2+3n-5}{n^3-6n^2+1}$
     En factorisant par le terme de plus haut degré avec $n \to +\infty$: $v_n = \dfrac{n^2(1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2})}{n^3(1-\frac{6}{n}+\frac{1}{n^3})} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{1-\frac{6}{n}+\frac{1}{n^3}}$
     $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$
   - $w_n = \sqrt{n} - n^2\sqrt{n} = \sqrt{n}(1-n^2)$
     Par produit on a alors : $\lim_{n\to+\infty} w_n = -\infty$.

2. - Pour $n \to +\infty$ on a : $t_n = \dfrac{9-n^2}{(n+1)(2n+1)} = \dfrac{n^2(\frac{9}{n^2}-1)}{n(1+\frac{1}{n})\cdot n(2+\frac{1}{n})} = \dfrac{n^2(\frac{9}{n^2}-1)}{n^2(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})} = \dfrac{\frac{9}{n^2}-1}{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}$
     $\lim_{n\to+\infty} t_n = \dfrac{-1}{1\times 2} = -\dfrac{1}{2}$

- $k_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}$
  Multiplions par la quantité conjuguée :
  $k_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}} \times \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} = \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{(n+1)-(n+2)} = \dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{-1} = -\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}$
  $\lim_{n\to+\infty} k_n = -\infty$

Exercice 5

$f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

1. a. **Dérivée :**
   $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)-e^x \times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{e^x(x-1-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$

   b. **Tableau de variations :**
   Signe de $f'(x)$:
   - $e^x > 0$ pour tout x
   - $(x-1)^2 > 0$ pour $x \neq 1$
   - Donc $f'(x)$ du signe de $(x-2)$

   $f'(x) = 0$ pour $x = 2$

   $f'(x) < 0$ pour $x < 2$ $(x \neq 1)$

   $f'(x) > 0$ pour $x > 2$

   Limites :
   - En $-\infty$: $e^x \to 0$, donc $f(x) \to 0$
   - En 1^- : $e^x \to e$, $x-1 \to 0^-$, donc $f(x) \to -\infty$
   - En 1^+ : $e^x \to e$, $x-1 \to 0^+$, donc $f(x) \to +\infty$
   - En $+\infty$: $f(x) \sim \dfrac{e^x}{x} \to +\infty$ (croissance comparée)

   Tableau :

x	$-\infty$		1		2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	e^2	$\nearrow$

2. $f''(x) = \dfrac{(x^2-4x+5)e^x}{(x-1)^3}$ sur $]-\infty;1[$

   a. **Convexité :**
   Signe de $f''(x)$:
   - $e^x > 0$
   - x^2-4x+5 : discriminant $\Delta = 16-20 = -4 < 0$, donc toujours positif
   - $(x-1)^3 < 0$ sur $]-\infty;1[$

   Donc $f''(x) < 0$ sur $]-\infty;1[$, donc f est concave sur $]-\infty;1[$.

   b. **Tangente en 0 :**
   $f(0) = \dfrac{e^0}{0-1} = -1$
   $f'(0) = \dfrac{e^0(0-2)}{(0-1)^2} = \dfrac{-2}{1} = -2$
   Équation : $y = f'(0)(x-0)+f(0) = -2x-1$

c. **Inégalité :**
Par concavité de f sur $]-\infty;1[$, la courbe C est en dessous de ses tangentes.
Donc pour tout $x \in]-\infty;1[$: $f(x) \leq -2x-1$
C'est-à-dire : $\frac{e^x}{x-1} \leq -2x-1$
Comme $x-1<0$ sur $]-\infty;1[$, en multipliant par $(x-1)$ (négatif) on inverse l'inégalité :
$e^x \geq (-2x-1)(x-1)$

Exercice 7

$f(x) = 1000(x+5)e^{-0,2x}$ sur $[0;20]$

1. **Dérivée :**
   $f'(x) = -200xe^{-0,2x}$
2. **Variations :**
   Pour $x \in [0;20]$:
   - $e^{-0,2x} > 0$
   - $-200x \leq 0$ (nul en 0)
   - Donc $f'(x) \leq 0$

   f est décroissante sur $[0;20]$
   Valeurs :
   - $f(0) = 1000(0+5)e^0 = 5000$
   - $f(20) = 1000(20+5)e^{-4} = 25000e^{-4} \approx 458$ (car $e^{-4} \approx 0,0183$)
3. **Équation $f(x) = 3000$:**
   La solution est entre 6 et 7.
   Affinage : $\alpha \approx 6,88$ à $0,01$ près.
4. a. **Dérivée seconde :**
   $f''(x) = -200[e^{-0,2x} + x(-0,2)e^{-0,2x}]$
   $f''(x) = -200e^{-0,2x}[1-0,2x]$
   $f''(x) = -200e^{-0,2x}(1-0,2x)$

   b. **Convexité :**
   Signe de $f''(x)$:
   - $-200e^{-0,2x} < 0$ (toujours)
   - Donc $f''(x)$ du signe opposé de $(1-0,2x)$

   $1-0,2x = 0$ pour $x=5$
   $1-0,2x > 0$ pour $x<5$
   $1-0,2x < 0$ pour $x>5$
   Donc :
   - $f''(x) < 0$ pour $x<5$: f concave
   - $f''(x) = 0$ pour $x=5$: point d'inflexion
   - $f''(x) > 0$ pour $x>5$: f convexe
5. a. **Prix pour demande > 3000 :**
   D'après la question 3, $f(x) > 3000$ pour $x < \alpha \approx 6,88$
   Donc en-deçà de 6,88 , la demande dépasse 3000 objets.

b. Accélération de la baisse :
La baisse s'accélère quand la dérivée décroît, c'est-à-dire quand $f''(x) < 0$.
D'après 4.b, $f''(x) < 0$ pour $x < 5$.
Donc la baisse s'accélère pour $x < 5$.
Pour $x > 5$, la baisse ralentit ($f''(x) > 0$, fonction convexe).

Exercice 6

Dans le cube ABCDEFGH :

1. **Réponse b**
2. **Réponse b**
3. **Réponse a**
4. **Réponse b**

1 Exercice Bonus

$f_a(x) = 2x^3 + x^2 + a$

- **Dérivée :** $f_a'(x) = 6x^2 + 2x = 2x(3x+1)$
- **Variations :**
  — $f_a'(x) = 0$ pour $x = 0$ ou $x = -\frac{1}{3}$
  — $f_a'(x) > 0$ pour $x < -\frac{1}{3}$ ou $x > 0$
  — $f_a'(x) < 0$ pour $-\frac{1}{3} < x < 0$
- **Valeurs remarquables :**
  — $f_a(-\frac{1}{3}) = 2(-\frac{1}{27}) + \frac{1}{9} + a = -\frac{2}{27} + \frac{3}{27} + a = \frac{1}{27} + a$
  — $f_a(0) = a$
- **Étude selon a :**
  1. Si $a > 0$:
     — $f_a(0) = a > 0$
     — $f_a(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + a > 0$
     — En $-\infty$: $f_a(x) \to -\infty$
     — En $+\infty$: $f_a(x) \to +\infty$
     — Donc f_a s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$
  2. Si $a = 0$:
     — $f_0(x) = 2x^3 + x^2 = x^2(2x+1)$
     — Racines : $x = 0$ (double) et $x = -\frac{1}{2}$
  3. Si $a < 0$:
     — Si $-\frac{1}{27} < a < 0$:
       — $f_a(0) = a < 0$
       — $f_a(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{27} + a > 0$
       — Donc 3 racines réelles
     — Si $a = -\frac{1}{27}$:
       — $f_a(-\frac{1}{3}) = 0$ (racine double)
       — $f_a(0) = -\frac{1}{27} < 0$

    - Donc 2 racines réelles
  - Si $a < -\frac{1}{27}$:
    - $f_a(-\frac{1}{3}) < 0$
    - $f_a(0) < 0$
    - Donc 1 racine réelle

- **Conclusion sur le signe :**
  - Pour $a \geq 0$: $f_a(x)$ positive sauf entre $-\infty$ et la racine négative
  - Pour $a < 0$: le signe dépend des racines (voir ci-dessus)