NOM :	**Prénom :**	**Classe :**
Appréciation :		**Note :**

EXERCICE 1 **4 points**

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1+3u_n}{3+u_n}$$

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.
2. **a.** Établir que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$$

   b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

EXERCICE 2 **3 points**

On définit les points P, Q et R par les relations vectorielles suivantes :
$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AQ} = -\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AE}$.

1. Construire une figure.
2. Démontrer que les points A, P, Q et R sont coplanaires.

EXERCICE 3 **4 points**

ABCD est un pavé droit de centre O.
I et J sont les centres respectifs des faces AEHD et BFGC. K est le milieu de [EF] et M celui de [EK].
L est le symétrique de O par rapport à K.

1. Montrer que I, M et L sont alignés.
2. **a.** Montrer qu'il existe deux nombres réels a et b tels que $\overrightarrow{CL} = a\overrightarrow{JF} + b\overrightarrow{CI}$?
   b. Que peut-on conclure sur $\overrightarrow{CL}$, $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{JF}$?
3. Démontrer que $\overrightarrow{CL}$, $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CJ}$ sont coplanaires.
4. Conclure sur la position des points C, I, L et J.

EXERCICE 4 **5 points**

Déterminer dans chacun des cas suivants la limite de la suite (u_n) :

1. $u_n = (3n+1)(-7n+5)$ $\qquad v_n = \dfrac{n^2+3n-5}{n^3-6n^2+1}$ $\qquad w_n = \sqrt{n} - n^2\sqrt{n}$
2. $t_n = \dfrac{9-n^2}{(n+1)(2n+1)}$ $\qquad k_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}$

EXERCICE 5 — 4 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$
On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I.
On appelle C la courbe représentative de f dans un repère

1. **a.** Montrer que pour tout réel x de I, on a : $f'(x) = \dfrac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$.

   b. Dresser en justifiant, le tableau de variation de la fonction f sur I.

2. On admet que pour x de $]-\infty;1[$, on a : $f''(x) = \dfrac{(x^2-4x+5)e^x}{(x-1)^3}$.

   a. Étudier la convexité de f sur $]-\infty;1[$.

   b. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

   c. En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty;1[$, on a : $e^x \geq (-2x-1)(x-1)$.

EXERCICE 6 — 2 points

Choisir la ou les bonnes réponses. Dans un cube $ABCDEFGH$,

1. les droites (CD) et (EH) sont :
   a. sécantes. b. parallèles. c. non coplanaires.
2. la droite (CD) et le plan (AFH) sont :
   a. sécants. b. parallèles. c. (CD) est incluse dans (AFH).
3. les plans (CFH) et (ABD) sont :
   a. sécants. b. parallèles. c. confondus.
4. les plans (FCH) et (BDE) sont :
   a. sécants. b. parallèles. c. confondus.

EXERCICE 7 — 5 points

La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle $[0;20]$ par : $f(x) = 1\,000(x+5)e^{-0,2x}$
$f(x)$ représente la quantité d'objets demandés lorsque le prix unitaire est égal à x euros.

1. Pour tout x de $[0;20]$, calculer $f'(x)$.
2. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $[0;20]$. Si nécessaire, arrondir à l'unité les valeurs présentes dans le tableau.
3. On admet que l'équation $f(x) = 3\,000$ admet une unique solution α sur $[0;20]$.
   Donner une valeur approchée de α à $0,01$ près à l'aide de la calculatrice.
4. **a.** Calculer $f''(x)$ sur $[0;20]$.

   b. Déterminer, par le calcul la convexité de la fonction f.
5. **a.** En-deçà de quel prix unitaire, arrondi au centime, la demande est-elle supérieure à $3\,000$ objets ?

   b. À partir de quelle valeur de x la baisse de la quantité d'objets demandés s'accélère ?
   Justifier la démarche.

EXERCICE BONUS — 2 points

Soit a un réel et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = 2x^3 + x^2 + a$.
Étudier selon les valeurs de a le signe de $f_a(x)$.