Chapitre 6. Suites numériques : Convergence et Comparaison

Boulanger Yann

28 août 2025

Table des matières

1 Convergence d'une suite numérique

1.1 Suites convergentes

Définition
On dit qu'une suite (u_n) est **convergente** lorsqu'elle admet une limite ℓ en $+\infty$.

Exemple
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $u_n = \frac{5}{n^3} - 9$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = -9 \in \mathbb{R}$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une convergente vers -9.

Proposition
La suite (u_n) de nombres réels converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ ssi la suite $(|u_n - \ell|)$ converge vers 0.

démonstration
En effet, si $(v_n) = (|u_n - \ell|)$, on a :
$(\forall\varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon) \iff (\forall\varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad 0 \leq v_n \leq \varepsilon)$

Exemple
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $v_n = \frac{-2n+3}{-4n^2} + \pi$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(|v_n - \pi|) = \lim\limits_{n\to+\infty}(|\frac{-2n+3}{-4n^2}|) = 0$ alors $(|v_n - \pi|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une convergente vers 0.
Par conséquent, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers π.

1.2 Suites divergentes

Définition
Une suite (u_n) est dite **divergente** si elle n'est pas convergente.

Remarque
Une suite est divergente dans deux cas :

- soit sa limite en $+\infty$ est $\pm\infty$;
- soit (u_n) n'a pas de limite en $+\infty$.

Exemples

- Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\lambda_n = 3n - 1$.
  Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda_n) = +\infty$, alors la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
- Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\phi_n = (-1)^n$.
  Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(\phi_n) = \pm 1$, alors la limite de la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas finie. Par conséquent, $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

2 Suites bornées

2.1 Majorant, minorant

Définitions

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

On dit que :

- (u_n) est **majorée** si et seulement si : $\exists\ M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M$.
  On dit alors que M est un **majorant** de la suite (u_n).
- (u_n) est **minorée** si et seulement si : $\exists\ m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m$.
  On dit alors que M est un **minorant** de la suite (u_n).
- (u_n) est **bornée** si et seulement si (u_n) est majorée et minorée.

Proposition

Une suite qui converge vers $+\infty$ n'est pas bornée.

démonstration

En effet, si la suite (u_n) est bornée, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq M$, on ait $u_n \leq M$.
Or, comme (u_n) tend vers $+\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $u_n \geq M + 1$.
On a alors : $\forall n \geq N, \quad M + 1 \leq u_n \leq M$, ce qui est absurde.

Définition

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

On dit que (u_n) est **bornée** ssi elle est minorée et majorée ou en ssi $\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M$.

2.2 Caractère borné

Théorème

Soit (u_n) une suite de nombres réels. Si (u_n) converge, alors elle est bornée.

démonstration

En effet, si ℓ est la limite de la suite (u_n), prenons $\varepsilon = 1 > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$, on ait $u_n - \ell \leq 1$.
On a alors, grâce à la seconde inégalité triangulaire : $\forall n \geq N, \quad |u_n| - |\ell| \leq ||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell| \leq 1$, donc : $|u_n| \leq |\ell| + 1$. En particulier, si $M = max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1)$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$, et donc (u_n) est bornée.

Remarque

La réciproque est fausse : par exemple, la suite $((-1)^n)$ qui vaut alternativement 1 et -1 est bornée mais ne converge pas.

3 Suites Monotones

3.1 Théorème des suites monotones

Définition
On dit qu'elle est monotone si elle est soit croissante, soit décroissante.

Théorème des suites monotones
Toute suite réelle croissante et majorée converge.
Toute suite réelle croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
De même toute suite réelle décroissante et minorée converge.
Toute suite réelle décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Donnons une interprétation graphique du théorème des suites monotones dans le cas où u_n est croissante. La figure 23.6 est un exemple de suite croissante est majorée par M. Puisque les termes u_n sont de plus en plus grands mais sont soumis au plafond M, il est clair qu'il doivent finalement tendre vers une "asymptote" de hauteur $L \leq M$. Ainsi la suite u_n converge bien (vers L). On notera qu'il n'y a aucune raison pour que $L = M$, et le théorème des suites monotones ne donne jamais la valeur de la limite en cas de convergence.

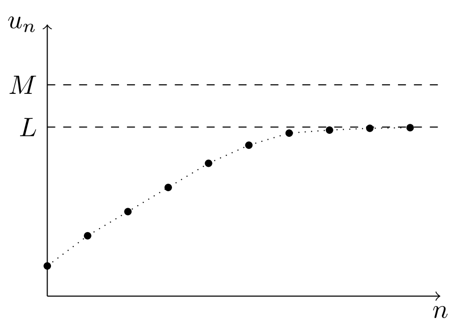

Figure 23.6 - Suite croissante majorée

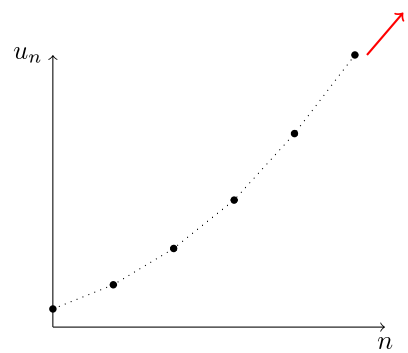

Figure 23.7 - Suite croissante non majorée

De même, la figure 23.7 donne un exemple de suite croissante mais non majorée : cela signifie que, quel que soit le nombre M donné, il existe un $u_N > M$ (puisque M ne peut être un majorant). Alors $u_n \geq M$ pour tout $n \geq N$ car u_n est croissante. Comme M est arbitrairement grand, cela signifie que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exemple
Soit la suite v_n définie par son premier terme $v_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$v_{n+1} = \frac{v_n^3 + 1}{3}$$

Démontrons d'abord par récurrence que la suite v_n est décroissante.
Il s'agit donc de démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq v_n$.
Initialisation : la propriété est vraie pour $n = 0$.
En effet $v_1 = \frac{1}{3}(v_0^3 + 1) = \frac{2}{3}$, donc $v_1 \leq v_0$.
Hérédité : supposons que, pour un n donné, $v_{n+1} \leq v_n$.
Alors $v_{n+1}^3 \leq v_n^3$, donc $v_{n+1}^3 + 1 \leq v_n^3 + 1$, et finalement

$$\frac{v_{n+1}^3 + 1}{3} \leq \frac{v_n^3 + 1}{3},$$

c'est-à-dire $v_{n+2} \leq v_{n+1}$. On a donc démontré par récurrence que la suite v_n est décroissante.
Démontrons maintenant, ce qui s'observe également sur le graphique, que la suite v_n est minorée par 0, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 0$.
Initialisation : la propriété est vraie pour $n = 0$, car $v_0 = 1 \geq 0$.
Hérédité : supposons que, pour un n donné, on a $v_n \geq 0$. Alors

$$v_{n+1} = \frac{v_n^3 + 1}{3} \geq \frac{1}{3} \geq 0.$$

On a donc démontré par récurrence que la suite v_n est minorée par 0 (en fait, on a même démontré qu'elle était minorée par $\frac{1}{3}$).
La suite v_n est donc décroissante et minorée. Ainsi elle converge en vertu du théorème des suites monotones. Sa limite s'obtient en *passant à la limite* dans la relation de récurrence $v_{n+1} = \frac{1}{3}\left(v_n^3 + 1\right)$. En effet, quand $n \to +\infty$, v_n se rapproche indéfiniment de L, et bien entendu il en de même pour v_{n+1}, car $n + 1 \to +\infty$ également. A la limite, on a donc

$$L = \frac{L^3 + 1}{3} \Leftrightarrow L^3 - 3L + 1 = 0.$$

Ainsi L est une solution de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$, qui peut donc être approchée numériquement par les valeurs successives de v_n (voir Exemple 23.2).

Exemple 23.9 Soit u_n définie pour tout $n \geq 1$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Pour tout $n \geq 1$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$. Ainsi $u_{n+1} \geq u_n$, et la suite u_n est donc croissante.
Montrons qu'elle est majorée. Si $k \geq 2$, on a

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

En sommant ces inégalités pour $k = 2, 3, \ldots, n$, il vient

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right).$$

Or la dernière somme est télescopique (Exemple 22.12) et vaut $1 - \frac{1}{n}$. Pour tout $n \geq 2$, on a donc

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq 2.$$

Ainsi u_n est croissante et majorée par 2. Donc elle converge d'après le théorème des suites monotones.
On notera que sa limite n'est pas égale à 2. On peut en effet montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$.

4 Limites de suites et Comparaison

4.1 Théorème de comparaison

Théorème

Soit u et v deux suites.

Si pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0,

- $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = -\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Démonstration

Il s'agit de prouver que tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$, avec A un réel quelconque, contient tous les termes de la suite v à partir d'un certain rang.

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$ donc par définition, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. Notons p ce rang.

  On sait aussi qu'à partir du rang n_0, $u_n \leq v_n$. Notons N le plus grand des deux entiers n_0 et p.

  À partir du rang N, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes u_n et donc à fortiori tous les termes v_n puisque l'inégalité $u_n \leq v_n$ est alors vérifiée.

  Ceci étant vrai quel que soit le réel A, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = +\infty$.
- Démonstration analogue. (À faire chez soi en exercice)

Exemple

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n + (-1)^n$.

1. Justifier que la suite n'est pas monotone.
2. Déterminer sa limite quand n tend vers ∞.

4.2 Théorème d'encadrement

Théorème

Soit u, v et w trois suites telles que :

- $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang n_0,
- v et w convergent vers la même limite l,
- alors la suite u converge et sa limite est l.

Remarques

- Le théorème d'encadrement est également nommé "théorème des gendarmes".
- Le théorème d'encadrement ne s'applique qu'à des suites **convergentes** ; dans le cas où les suites (v_n) et (w_n) divergent vers l'infini, le théorème de comparaison suffit.

Exemple

Étudier la convergence de la suite u définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{2+3\cos n}{n}$.

4.3 Limite d'une suite géométrique

Soit u une suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$, de raison q non nulle.
Alors pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$.
D'après les théorèmes sur les opérations et les limites, pour déterminer le comportement de la suite u à l'infini, il suffit de connaître celui de la suite v définie par $v_n = q^n$.

Théorème
Soit q un réel.

— Si $q \leq -1$: la suite (q^n) n'a pas de limite.

— Si $-1 < q < 1$: la suite (q^n) converge vers 0.

— Si $q = 1$: la suite (q^n) converge vers 1.

— Si $q > 1$: la suite (q^n) diverge vers $+\infty$.

Démonstration dans le cas où $q > 1$, exigible BAC : $q > 1$.
Posons alors $q = 1 + a$ avec $a > 0$.
a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$. Soit $P_n : \langle (1+a)^n \geq 1 + na \rangle$:

— **Initialisation :** $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$ donc P_0 est vraie.

— **Hérédité :** Supposons P_n vraie pour un certain n fixé et montrons alors que P_{n+1} est vraie.
Hypothèse de récurrence : $P_n : \langle (1+a)^n \geq 1 + na \rangle$
Ce que l'on veut montrer : $P_{n+1} : \langle (1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a \rangle$

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \times (1+a)$$

Or $(1+a)^n \geq 1 + na$ (Hypothèse de récurrence)
Donc $(1+a)^n \times (1+a) \geq (1+na)(1+a)$ (car $1 + a > 0$)
Donc $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a + na^2$
Donc $(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$ (car $na^2 \geq 0$).
Donc P_{n+1} est vraie.

— **Conclusion :** La proposition P_n est vraie au rang 0, de plus elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel n. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1 + na$

b) Retour à la démo :
On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $q^n \geq 1 + na$ avec $a > 0$.
Or $\lim_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Exemples

1. Déterminer la limite de la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = -5(\sqrt{3})^n$.
2. Déterminer la limite de la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -3(1 - \sqrt{2})^n$.
3. Déterminer la limite de la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.
4. La suite z définie sur $\mathbb{N}$ par $z_n = \frac{3^{n+1}}{(-2)^n}$ a-t-elle une limite ?

Solutions

1. $\sqrt{3} > 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} (\sqrt{3})^n = +\infty$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
2. $1 - \sqrt{2} \in [-1; 1[$ donc $\lim_{n \to +\infty} (1 - \sqrt{2})^n = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$. Or $\frac{1}{2} \in [-1; 1[$, donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, donc $\lim_{n \to +\infty} w_n = 2$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}, z_n = \frac{3^{n+1}}{(-2)^n} = 3 \times \frac{3^n}{(-2)^n} = 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^n$. Or $-\frac{3}{2} < -1$ donc $\left(-\frac{3}{2}\right)^n$ n'a pas de limite, donc la suite z non plus.

5 Pour aller plus loin

5.1 Théorème des suites adjacentes

Le second théorème d'existence de limite est le théorème des suites adjacentes.

Définition
On dit que les suites réelles u_n et v_n sont **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si
$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Exemple
Soient $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}$.
Dans l'exemple 23.9, on a montré que (u_n) est croissante.
Montrons que (v_n) est décroissante. On a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{(n+1)^2 n} = -\frac{1}{(n+1)^2 n}.$$

Ainsi $v_{n+1} - v_n \leq 0$, donc (v_n) est décroissante. Enfin $v_n - u_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
Ces deux suites sont donc adjacentes.

Theoreme [Théorème des suites adjacentes]
Si les suites u_n et v_n sont adjacentes, alors elles convergent toutes les deux vers la même limite.

Le théorème des suites adjacentes est schématisé par la figure ci-dessous :

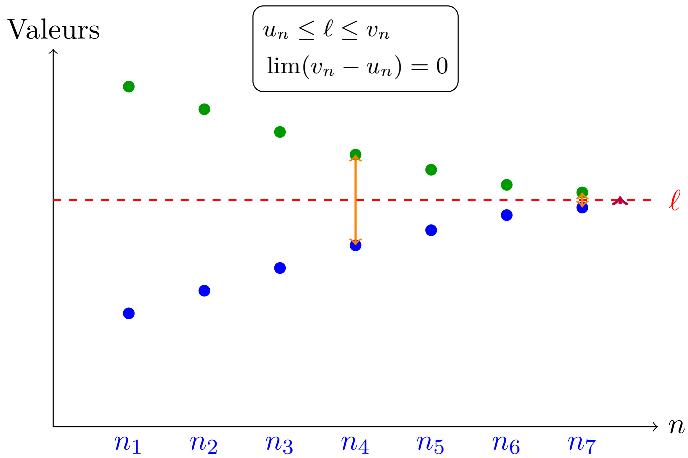

Figure 1 – Représentation graphique du théorème des suites adjacentes.

Démonstration
Supposons que u_n est croissante et v_n décroissante ; alors la suite $\varepsilon_n = v_n - u_n$ est décroissante.
En effet $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et $v_{n+1} - v_n \leq 0$, donc $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n) \leq 0$.
En outre ε_n converge vers 0, puisque u_n et v_n sont adjacentes. Cela impose à la suite ε_n d'être positive.
En effet, si pour un certain rang n_0 on a $\varepsilon_{n_0} < 0$, alors pour $n \geq n_0$ on aura $\varepsilon_n \leq \varepsilon_{n_0} < 0$ car ε_n décroît ; par passage à la limite il vient $0 = \lim \varepsilon_n \leq \varepsilon_{n_0} < 0$, ce qui est absurde.
On peut donc affirmer, en utilisant les monotonies, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$.

La suite u_n est donc croissante et majorée par v_0.
Elle converge d'après le théorème des suites monotones.
De même v_n converge en tant que suite décroissante et minorée par u_0.
Enfin puisque $\varepsilon_n = v_n - u_n$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, les limites de u_n et v_n sont identiques.

Remarque
Sous les hypothèses de la démonstration, notons ℓ la limite commune aux deux suites u_n et v_n.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq \ell \leq v_n$$

En d'autres termes u_n est une valeur approchée *par défaut* de ℓ à ε_n près et v_n est une valeur approchée *par excès* de ℓ à ε_n près.

Exemple
Soient les suites u_n et v_n de l'exemple 23.10. Ces deux suites sont adjacentes et convergent donc vers la même limite ℓ. Ici $\varepsilon_n = v_n - u_n = \frac{1}{n}$. Donc u_n est une valeur approchée par défaut de ℓ à $\frac{1}{n}$ près. Pour avoir une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près, il suffit de prendre $n = 100$.
La convergence de u_n et v_n vers ℓ est donc d'ordre $\frac{1}{n}$.

5.2 Suites extraites

Définition
Soit u_n une suite de nombres réels ou complexes.
Une **suite extraite** de u_n est une suite de la forme $u_{n_1}, u_{n_2}, \ldots, u_{n_p}, \ldots$, où $n_1 < n_2 < \ldots < n_p < \ldots$
est une suite strictement croissante d'entiers naturels.

Les exemples les plus simples de suites extraites sont la suite des termes de rang pair u_{2p} et la suite des termes de rang impair u_{2p+1} (voir exemple 23.5). Un exemple plus exotique est donné par la suite $u_2, u_3, u_5, \ldots, u_p, \ldots$ des termes correspondant aux indices qui sont des nombres premiers.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass s'énonce ainsi :

Théoreme[Bolzano-Weierstrass]
De toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente.
Autrement dit, si $a \leq u_n \leq b$ pour tout entier n, alors il existe un réel ℓ et une sous-suite u_{n_p} tels que
$\lim_{p\to\infty} u_{n_p} = \ell \in [a, b]$.

Démonstration
Voir exercice 23.16.

6 Exercices

6.1 Les basiques

Exercice 1
Soit u_n définie par son premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que u_n est croissante et majorée par 2.
   Conclusion ? Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
2. Représenter graphiquement $f(x) = \sqrt{2x}$ sur $[0, +\infty[$. Utiliser ce graphique pour vérifier les résultats précédents.

Exercice 2
Soit u_n définie par son premier terme $u_0 = 7$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 6$.
Démontrer que la suite $v_n = u_n - 5$ est une suite géométrique. En déduire que u_n est convergente et trouver sa limite.

Exercice 3
On pose

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Démontrer que u_n et v_n sont adjacentes.

Exercice 4
Soit u_n définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2 + 1$.

1. Démontrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer par récurrence que u_n est croissante.
3. Démontrer par récurrence que u_n est majorée par 2. Qu'en conclut-on ?
4. Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.
5. Que se passe-t-il si la suite u_n vérifie la même relation de récurrence, mais avec un premier terme $u_0 = 3$?

Exercice 5
Soit u_n définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n^2 + 1$.

1. Étudier u_n sur un graphique. Que remarque-t-on ?
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
3. On considère les suites extraites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   Démontrer par récurrence que v_n est croissante et w_n est décroissante.
   En déduire que v_n et w_n sont convergentes.
4. Montrer que v_n et w_n ont la même limite. Que peut-on dire de v_n et w_n ?
5. En déduire que la suite u_n est convergente et calculer sa limite.

Exercice 6
Soit $u_n = \frac{1}{n^r} \sum_{k=1}^{n} k^5$.
Démontrer que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
En déduire que u_n est convergente et trouver sa limite.

Exercice 7
Soit $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ $(n \geq 1)$.

1. Écrire u_n grâce au signe $\sum$.

2. Démontrer que u_n est croissante.
3. En observant que $\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n}$ pour tout $k \geq 0$, démontrer que $u_n \leq 1$ pour tout $n \geq 1$. Conclusion ?
4. Représenter graphiquement la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur $[0, 1]$.
5. En remarquant que
$$u_n = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+1},$$
interpréter u_n comme une somme de surfaces de rectangles sur le graphique précédent.
6. Que deviennent ces rectangles lorsque $n \to +\infty$? En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 8
Soient $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}$.
Montrer que u_n et v_n sont convergentes.

Exercice 9
On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-1}{k}\right)^k$.
Montrer que les suites extraites $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$ sont adjacentes.
En déduire la convergence de S_n.

Exercice 10
Cet exercice présente, sous une forme modernisée, un procédé de calcul de $\sqrt{2}$ figurant sur une tablette d'argile provenant des fouilles de Babylone.
La suite u_n est définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence
$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{u_n} + u_n\right) = f(u_n).$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 sous forme de fractions.
2. Démontrer par récurrence que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{2}$.
4. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_n. En déduire que la suite u_n est décroissante.
5. Démontrer que la suite u_n est convergente et calculer sa limite.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{2}{u_n}$. Démontrer que u_n et v_n sont adjacentes.
7. Déduire de ce qui précède un encadrement de $\sqrt{2}$, permettant d'obtenir une valeur approchée de $\sqrt{2}$ avec quatre décimales exactes.

6.2 Les techniques

Exercice 11
Soient u_n et v_n définies pour $n \geq 2$ par
$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$$

1. Montrer la double inégalité (I) : pour tout $x \geq 0$, $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.
2. Montrer que les suites u_n et v_n sont adjacentes. Leur limite commune s'appelle la *constante d'Euler* et se note γ. Comment peut-on calculer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près ?
3. Interpréter u_n à l'aide d'une somme de surfaces et de la représentation graphique de $y = \frac{1}{x}$.

Exercice 12
Soit la suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$.

1. Montrer que u_n est bornée.
2. Montrer que u_n est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 13
On définit u_n par $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n}$ pour tout $n \geq 1$.
Étudier la convergence de cette suite.

Exercice 14
Pour tout entier $n \geq 1$, on considère l'équation $x^n + x - 1 = 0 \;\; (E_n)$, où l'inconnue x est recherchée dans $]0, +\infty[$.

1. Résoudre l'équation (E_n) pour $n = 1$ et $n = 2$.
2. Étudier les variations de la fonction $x \to x^n + x - 1$ sur $[0, +\infty[$ pour $n \geq 1$. En déduire que l'équation (E_n) admet une et une seule racine positive qu'on notera x_n et montrer que $0 < x_n < 1$ pour tout $n \geq 1$.
3. Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction
$$f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln x}$$
et prouver que f est strictement croissante sur D.
4. Montrer que $f(x_n) = n$ pour tout $n \geq 1$.
5. Prouver que la suite x_n est strictement croissante.
6. En déduire la convergence de la suite x_n vers un nombre réel L, et préciser la valeur de L.

Exercice 15
Soit u_n une suite convergente de nombres réels ou complexes.
Démontrer que sa limite est unique.

6.3 Les exotiques et les olympiques

Exercice 16 [**(Bolzano-Weierstrass avec vue sur la mer)**]
Soit u_n une suite réelle.
On dit que l'entier n a vue sur la mer si pour tout $p \geq n$, $u_p \leq u_n$.
On note A l'ensemble des entiers qui ont vue sur la mer.

1. Montrer que, si A est infini, il existe une suite extraite de u_n décroissante.
2. Montrer que, si A est fini, il existe une suite extraite de u_n croissante.
3. Démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 17
Pour toute suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ de nombres réels, on considère la moyenne de ses n premiers termes
$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.
2. En déduire le théorème de la moyenne de Césaro : si la suite u_n converge vers ℓ, alors v_n converge vers ℓ.

Exercice 18[**(Moyenne arithmético-géométrique de Gauss)**]
Soient a et b deux nombres réels avec $0 < a \leq b$.
On définit les suites a_n et b_n par $a_0 = a, b_0 = b$, et les relations de récurrence

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Démontrer que $a_n \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Démontrer que les suites a_n et b_n sont adjacentes. Leur limite commune $M(a, b)$ s'appelle la moyenne arithmético-géométrique de a et b.
3. Calculer $M(1, 2)$ avec 7 décimales exactes.

Fin de chapitre