

|                       |                 |                 |
|-----------------------|-----------------|-----------------|
| <b>NOM :</b>          | <b>Prénom :</b> | <b>Classe :</b> |
| <b>Appréciation :</b> |                 | <b>Note :</b>   |

**EXERCICE 1****8 points**

1. a.  $g(x) = 3x^2 - 18x + 27 = 3(x^2 - 6x + 9) = 3(x - 3)^2$

Une seule racine double :  $x = 3$ .

b.  $h(x) = -8x^2 + x - \frac{5}{8}$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times (-8) \times \left(-\frac{5}{8}\right) = 1 - 20 = -19 < 0$$

Donc  $h$  n'a pas de racine réelle.

2. a.  $(E_1) : 3x^2 - 2x + 1 = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 1 = 4 - 12 = -8 < 0$$

Donc pas de solution réelle :  $S = \emptyset$ .

b.  $(E_2) : \frac{x+2}{x^2+3x+2} = 0$

Condition d'existence :  $x^2 + 3x + 2 \neq 0$

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = -2$$

Donc  $x \neq -1$  et  $x \neq -2$

$$\frac{x+2}{x^2+3x+2} = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

Mais  $x = -2$  est exclu (annule le dénominateur).

Donc  $S = \emptyset$ .

3. a.  $(E_3) : 27x^2 - 36x + 12 \geq 0$

$$27x^2 - 36x + 12 = 3(9x^2 - 12x + 4) = 3(3x - 2)^2 \geq 0$$

Le carré est toujours positif ou nul, donc inégalité toujours vraie.

$S = \mathbb{R}$ .

b.  $(E_4) : \frac{x-2}{2x^2+3x-2} < 0$

On étudie le signe du quotient :

Racines du numérateur :  $x = 2$

Racines du dénominateur :  $2x^2 + 3x - 2 = 0$

$$\Delta = 9 + 16 = 25, x_1 = \frac{-3-5}{4} = -2, x_2 = \frac{-3+5}{4} = 0,5$$

Tableau de signes :

| $x$         | $-\infty$ | $-2$        | $0,5$ | $2$         | $+\infty$ |
|-------------|-----------|-------------|-------|-------------|-----------|
| $x-2$       | $-$       | $-$         | $-$   | $0$         | $+$       |
| $2x^2+3x-2$ | $+$       | $0$         | $-$   | $0$         | $+$       |
| quotient    | $-$       | $\emptyset$ | $+$   | $\emptyset$ | $+$       |

Donc  $S = ]-\infty, -2[ \cup ]0,5; 2[$ .

**EXERCICE 2****8 points**

1.  $f(x) = 7x^2 - 14x - 21$

a.  $\Delta = (-14)^2 - 4 \times 7 \times (-21) = 196 + 588 = 784 = 28^2$   
 $x_1 = \frac{14 - 28}{14} = \frac{-14}{14} = -1, x_2 = \frac{14 + 28}{14} = \frac{42}{14} = 3$

b. Forme factorisée :  $f(x) = 7(x+1)(x-3)$

c. Signe : coefficient  $a = 7 > 0$ , donc  $f(x)$  positif sauf entre les racines

$f(x) > 0$  pour  $x < -1$  ou  $x > 3$

$f(x) = 0$  pour  $x = -1$  ou  $x = 3$

$f(x) < 0$  pour  $-1 < x < 3$

d.  $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$  ou  $x > 3$

2.  $g(x) = 2x^2 - 13x + 21$

a.  $2\left(x - \frac{7}{2}\right)(x - 3) = 2\left(x^2 - 3x - \frac{7}{2}x + \frac{21}{2}\right) = 2\left(x^2 - \frac{13}{2}x + \frac{21}{2}\right) = 2x^2 - 13x + 21$

b. Forme canonique :

$\alpha = \frac{13}{4}, \beta = g\left(\frac{13}{4}\right) = 2 \times \frac{169}{16} - 13 \times \frac{13}{4} + 21 = \frac{338}{16} - \frac{169}{4} + 21$   
 $= \frac{338}{16} - \frac{676}{16} + \frac{336}{16} = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$

Donc  $g(x) = 2\left(x - \frac{13}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$

c.  $g\left(\frac{13}{2}\right) = 2 \times \frac{169}{4} - 13 \times \frac{13}{2} + 21 = \frac{338}{4} - \frac{169}{2} + 21$   
 $= \frac{338}{4} - \frac{338}{4} + 21 = 21$

3.  $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow 7x^2 - 14x - 21 \geq 2x^2 - 13x + 21$

$\Leftrightarrow 5x^2 - x - 42 \geq 0$

$\Delta = 1 + 840 = 841 = 29^2$

$x_1 = \frac{1 - 29}{10} = \frac{-28}{10} = -2,8, x_2 = \frac{1 + 29}{10} = 3$

$5 > 0$ , donc  $5x^2 - x - 42 \geq 0$  pour  $x \leq -2,8$  ou  $x \geq 3$

$S = ]-\infty; -2,8] \cup [3; +\infty[$

**EXERCICE 3****3 points**

$$\text{Aire de } ABC = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{18 \times 8}{2} = 72 \text{ m}^2$$

$$\text{Aire de } ADE = \frac{AD \times AE}{2} = \frac{x \times (18 - x)}{2}$$

$$\text{Condition : Aire}(ADE) = \frac{1}{2} \text{ Aire}(ABC)$$

$$\frac{x(18 - x)}{2} = \frac{72}{2}$$

$$x(18 - x) = 72$$

$$18x - x^2 = 72$$

$$x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$\Delta = 324 - 288 = 36$$

$$x_1 = \frac{18 - 6}{2} = 6, x_2 = \frac{18 + 6}{2} = 12$$

Vérification :  $0 < x < 8$  (car  $AD \leq AC$ )

Donc seule  $x = 6$  m convient.

**EXERCICE 4****2 points**

$$\xi(x) = (m - 1)x^2 - (2m + 3)x + m$$

1. Racine double  $\Leftrightarrow \Delta = 0$

$$\Delta = (2m + 3)^2 - 4(m - 1)m = 4m^2 + 12m + 9 - 4m^2 + 4m = 16m + 9$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 16m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{16}$$

2. Pour  $m = -\frac{9}{16}$  :

$$\xi(x) = \left(-\frac{9}{16} - 1\right)x^2 - \left(2 \times \left(-\frac{9}{16}\right) + 3\right)x - \frac{9}{16}$$

$$\xi(x) = -\frac{25}{16}x^2 - \left(-\frac{9}{8} + 3\right)x - \frac{9}{16}$$

$$\xi(x) = -\frac{25}{16}x^2 - \frac{15}{8}x - \frac{9}{16}$$

$$\text{Racine double : } x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{\frac{15}{8}}{2 \times \left(-\frac{25}{16}\right)} = \frac{\frac{15}{8}}{-\frac{25}{8}} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{Forme factorisée : } \xi(x) = -\frac{25}{16} \left(x + \frac{3}{5}\right)^2$$

**EXERCICE 5****3 points**

1.  $u_n = n^2 - 4n - 3$

a.  $u_0 = -3, u_1 = 1 - 4 - 3 = -6, u_2 = 4 - 8 - 3 = -7, u_3 = 9 - 12 - 3 = -6$

b.  $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 4(n+1) - 3 - (n^2 - 4n - 3)$   
 $= n^2 + 2n + 1 - 4n - 4 - 3 - n^2 + 4n + 3 = 2n - 3$

Pour  $n \geq 2, 2n - 3 > 0$ , donc  $(u_n)$  croissante pour  $n \geq 2$ .

2.  $u_{n+1} = u_n + n - 4, u_0 = -2$

$$u_1 = -2 + 0 - 4 = -6$$

$$u_2 = -6 + 1 - 4 = -9$$

$$u_3 = -9 + 2 - 4 = -11$$

$$u_4 = -11 + 3 - 4 = -12$$

**EXERCICE 6****2 points**

$$u_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2}$$

1.  $u_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2} = \frac{n^2}{2n^2} + \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}$

2.  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)^2} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2n^2}$   
 $= \frac{n^2 - (n+1)^2}{2n^2(n+1)^2} = \frac{-2n-1}{2n^2(n+1)^2} < 0$  pour  $n \geq 1$

3.  $u_{n+1} - u_n < 0$ , donc  $(u_n)$  est décroissante.

4.  $u_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Comme  $(u_n)$  décroît, pour  $n \geq 1, u_n \leq u_1 = 1$ .

**EXERCICE 7****2 points**

Soient  $n - 1$ ,  $n$ ,  $n + 1$  les côtés des trois carrés.

Somme des aires :  $(n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 = 15125$

$$(n^2 - 2n + 1) + n^2 + (n^2 + 2n + 1) = 15125$$

$$3n^2 + 2 = 15125$$

$$3n^2 = 15123$$

$$n^2 = 5041$$

$$n = \sqrt{5041} = 71 \quad (n > 0)$$

Les côtés sont donc 70, 71 et 72.

$$\text{Vérification : } 70^2 + 71^2 + 72^2 = 4900 + 5041 + 5184 = 15125$$

**EXERCICE 8****2 points**

1. Avec  $X = x^2$  :  $5X^2 - 15X + 10 = 0$

2.  $5X^2 - 15X + 10 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0$   
 $\Delta = 9 - 8 = 1$ ,  $X_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ ,  $X_2 = \frac{3+1}{2} = 2$

3.  $x^2 = 1 \Rightarrow x = -1$  ou  $x = 1$   
 $x^2 = 2 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$  ou  $x = \sqrt{2}$   
 $S = \{-1; 1; -\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$