

# Chapitre 5. Cosinus et Sinus. Cours.

Boulanger Yann

2 décembre 2025

## Table des matières

<b>1 Exercices supplémentaires : Trigonométrie</b>	<b>2</b>
1.1 Partie A : Cercle trigonométrique, cosinus et sinus	2
1.1.1 Exercice 1	2
1.1.2 Exercice 2	2
1.1.3 Exercice 3	2
1.1.4 Exercice 4	2
1.1.5 Exercice 5	2
1.1.6 Exercice 6	2
1.1.7 Exercice 7	2
1.1.8 Exercice 8	2
1.1.9 Exercice 9	3
1.2 Partie B : Angle orienté, mesure principale d'un angle	3
1.2.1 Exercice 1	3
1.2.2 Exercice 2	3
1.2.3 Exercice 3	3
1.2.4 Exercice 4	3
1.2.5 Exercice 5	3
1.2.6 Exercice 6	3
1.2.7 Exercice 7	3
1.2.8 Exercice 8	4
1.3 Partie C : Angles associés	4
1.3.1 Exercice 1	4
1.3.2 Exercice 2	4
1.3.3 Exercice 3	4
1.3.4 Exercice 4	4
1.4 Partie D : Equations et inéquations trigonométriques	5
1.4.1 Exercice 1	5
1.4.2 Exercice 2	5
1.4.3 Exercice 3	5
1.4.4 Exercice 4	5
1.4.5 Exercice 5	5
1.4.6 Exercice 6	6
1.4.7 Exercice 7	6
1.4.8 Exercice 8	6
<b>2 Fin du Chapitre</b>	<b>6</b>

## 1 Exercices supplémentaires : Trigonométrie

### 1.1 Partie A : Cercle trigonométrique, cosinus et sinus

#### 1.1.1 Exercice 1

Convertir en radians les mesures d'angles exprimées en degrés :  $60^\circ$ ;  $150^\circ$ ;  $10^\circ$ ;  $12^\circ$ ;  $198^\circ$ ;  $15^\circ$

#### 1.1.2 Exercice 2

Dans chacun des cas suivant, donner trois autres réels associés au même point sur le cercle trigonométrique :

- 1)  $-\pi$
- 2)  $\frac{3\pi}{2}$
- 3)  $10\pi$
- 4)  $-\frac{\pi}{4}$

#### 1.1.3 Exercice 3

Parmi les mesures suivantes, indiquer celles qui sont associées au même point que  $-\frac{\pi}{12}$  sur le cercle trigonométrique.

$$\frac{47\pi}{12}; \frac{49\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}; -\frac{241\pi}{12}; -\frac{37\pi}{12}; -\frac{313\pi}{12}$$

#### 1.1.4 Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, déterminer si  $x$  et  $y$  sont des mesures d'un même angle orienté.

- 1)  $x = \frac{\pi}{2}$ ;  $y = \frac{3\pi}{2}$
- 2)  $x = \frac{5\pi}{3}$ ;  $y = -\frac{21\pi}{4}$
- 3)  $x = \frac{29\pi}{3}$ ;  $y = -\frac{3\pi}{3}$
- 4)  $x = \frac{43\pi}{12}$ ;  $y = -\frac{5\pi}{12}$

#### 1.1.5 Exercice 5

Sur le cercle trigonométrique ci-contre, déterminer les réels associés aux points  $A, B, C, D, E, F, G, H, I$  et  $J$ .

#### 1.1.6 Exercice 6

Placer sur le cercle trigonométrique les points  $A, B, C, D, E$  et  $F$  repérés par

$$\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; -\frac{5\pi}{4}; -\frac{2\pi}{3}$$

#### 1.1.7 Exercice 7

On considère un réel  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  tel que  $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ .

- 1) Déterminer la valeur exacte de  $\cos(x)$ .
- 2) On sait que  $x \in \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, -\frac{5\pi}{12} \right\}$ . Déterminer la valeur exacte de  $x$ .

#### 1.1.8 Exercice 8

- 1) Sachant que  $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ , calculer la valeur de  $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$ .
- 2) En déduire  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

### 1.1.9 Exercice 9

Dans chacun des cas suivants, déterminer  $\cos(x)$

- 1)  $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$  et  $\sin(x) = \frac{1}{4}$
- 2)  $x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$  et  $\sin(x) = -0,6$
- 3)  $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$  et  $\sin(x) = -\frac{2}{3}$

## 1.2 Partie B : Angle orienté, mesure principale dun angle

### 1.2.1 Exercice 1

Déterminer la mesure principale des angles dont les mesures en radians sont :

$$-\frac{7\pi}{3}; -\pi; \frac{13\pi}{6}; \frac{47\pi}{12}; -\frac{49\pi}{6}; \frac{11\pi}{3}; -\frac{241\pi}{4}; -\frac{37\pi}{12}; 3, 14; 2013$$

### 1.2.2 Exercice 2

Donner une mesure en radian des angles orientés suivants :

$$(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}); (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{ON}); (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OP}); (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{ON}); (\overrightarrow{OP}; \overrightarrow{OM})$$

### 1.2.3 Exercice 3

- 1) Construire un triangle direct  $ABC$  rectangle en  $A$  tel que  $BC = 2AC$ .
- 2) Construire deux triangles équilatéraux direct  $ACD$  et  $ABE$ .
- 3) Donner une mesure en radian des angles  $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$  :

$$(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}); (\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{CB}) \text{ et } (\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{CB}).$$

### 1.2.4 Exercice 4

$ABC$  est un triangle rectangle en  $A$ , direct, tel que  $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{6}$   $[2\pi]$  et  $ACD$  est un triangle équilatéral direct.

- 1) Faire une figure.
- 2) Déterminer la mesure principale des angles suivants :  $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}); (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{AC}); (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BA}); (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$

### 1.2.5 Exercice 5

$ABC$  est un triangle rectangle en  $A$  direct tel que  $BC = 2AC$ .  $ACD$  est un triangle rectangle isocèle en  $C$  direct et  $BAE$  est un triangle équilatéral direct.

- 1) Faire une figure.
- 2) Déterminer la mesure principale des angles suivants :  $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}); (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{AD})$  et  $(\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{BC})$ .

### 1.2.6 Exercice 6

Sachant que  $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = -\frac{3\pi}{4}$   $[2\pi]$ , déterminer la mesure principale de  $(2\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}); (-\overrightarrow{v}; 2\overrightarrow{u}); (3\overrightarrow{v}; -2\overrightarrow{u})$

### 1.2.7 Exercice 7

Sachant que  $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = -\frac{\pi}{7}$   $[2\pi]$  et  $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{w}) = -\frac{\pi}{4}$   $[2\pi]$ , déterminer la mesure principale de  $(\overrightarrow{v}; \overrightarrow{w}); (-\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$  et  $(-\overrightarrow{w}; \overrightarrow{v})$ .

### 1.2.8 Exercice 8

$A, B, C$  et  $D$  sont quatre points du plan. Démontrer légalité :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = 0[2\pi]$$

## 1.3 Partie C : Angles associés

### 1.3.1 Exercice 1

On considère un entier relatif  $n$  (il peut être positif ou négatif). Déterminer, éventuellement en fonction de  $n$ , le cosinus et le sinus des réels :

$$2n\pi; (2n+1)\pi; n\pi; -\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi$$

### 1.3.2 Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes :

- 1)  $A = \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos(\pi)$
- 2)  $B = \cos(-\pi) + \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
- 3)  $C = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin(\pi)$

### 1.3.3 Exercice 3

Exprimer en fonction de  $\cos(x)$  ou de  $\sin(x)$  les réels suivants :

- 1)  $A = \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$
- 2)  $B = \sin(x + 100\pi)$
- 3)  $C = \cos\left(\frac{2012\pi}{2} + x\right)$
- 4)  $D = \sin\left(\frac{2013\pi}{2} + x\right)$
- 5)  $E = \sin(x - 78\pi)$
- 6)  $F = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4 \sin\left(-x - \frac{\pi}{2}\right) - 5 \sin(\pi + x)$
- 7)  $G = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 2 \cos(-x - \pi) + 5 \sin(-x)$

### 1.3.4 Exercice 4

Calculer les valeurs exactes de :  $\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)$ ;  $\sin\left(-\frac{18\pi}{4}\right)$ ;  $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$  et  $\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right)$

## 1.4 Partie D : Equations et inéquations trigonométriques

### 1.4.1 Exercice 1

A l'aide d'un cercle trigonométrique, donner toutes les valeurs possibles de  $x$  vérifiant les conditions données.

- 1)  $\cos(x) = \frac{1}{2}$  et  $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  avec  $x \in [-\pi; \pi]$
- 2)  $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  avec  $x \in [-\pi; \pi]$
- 3)  $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\sin(x) = -\frac{1}{2}$  avec  $x \in [-\pi; 3\pi]$
- 4)  $\cos(x) = 0$  et  $\sin(x) = -1$  avec  $x \in [-2\pi; 3\pi]$

### 1.4.2 Exercice 2

Résoudre les équations ci-dessous dans  $\mathbb{R}$

- 1)  $\cos(x) = \frac{1}{2}$
- 2)  $\sin(x) = \frac{1}{2}$
- 3)  $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 4)  $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

### 1.4.3 Exercice 3

Placer sur le cercle trigonométrique les points repérés par les équations suivantes :

- 1)  $2x = \frac{\pi}{2}$   $[2\pi]$
- 2)  $4x = \frac{\pi}{2}$   $[2\pi]$
- 3)  $3x = \frac{3\pi}{2}$   $[2\pi]$

### 1.4.4 Exercice 4

Résoudre les équations trigonométriques suivantes.

- 1)  $\cos(2x) = \cos\left(\frac{8\pi}{2}\right)$  dans  $\mathbb{R}$  puis dans  $[\pi; 5\pi]$
- 2)  $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$  dans  $\mathbb{R}$  puis dans  $[-2\pi; 2\pi]$
- 3)  $\cos(3x) = -\cos(x)$  dans  $\mathbb{R}$  puis dans  $[-2\pi; \pi]$
- 4)  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin(x)$  dans  $\mathbb{R}$  puis dans  $[4\pi; 6\pi]$
- 5)  $\sin(3x) = \cos(2x)$  dans  $\mathbb{R}$

### 1.4.5 Exercice 5

Représenter sur un cercle trigonométrique l'ensemble des points  $M$  du cercle associés aux réels  $x$  vérifiant :

- 1)  $0 \leq \cos(x) \leq 1$
- 2)  $\cos(x) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$
- 3)  $-1 < \sin(x) < 0$
- 4)  $-\frac{1}{2} \leq \sin(x) \leq 1$
- 5)  $\sin(x) \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right]$
- 6)  $\cos(x) \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

**1.4.6 Exercice 6**

Résoudre à laide du cercle trigonométrique les inéquations suivantes :

- 1)  $\sin(x) < \frac{1}{2}$  dans  $[-\pi; \pi]$
- 2)  $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$  dans  $[0; 2\pi]$
- 3)  $\cos(x) > \frac{1}{\sqrt{2}}$  dans  $[-\pi; 3\pi]$
- 4)  $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  dans  $[-\pi; 2\pi]$

**1.4.7 Exercice 7**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes

- 1)  $2\cos^2(x) + 9\cos(x) + 4 = 0$
- 2)  $4\sin^2(x) - 2(1 + \sqrt{3})\sin(x) + \sqrt{3} = 0$

**1.4.8 Exercice 8**

- 1) Déterminer les racines éventuelles du trinôme  $t$  défini par  $t(x) = -4x^2 + (2\sqrt{3} - 2)x + \sqrt{3}$ .
- 2) Factoriser  $t(x)$
- 3) Établir dans  $[0; 2\pi]$  le signe de  $2\cos(x) + 1$  et de  $-2\cos(x) + \sqrt{3}$
- 4) En déduire le signe sur  $[0; 2\pi]$  de  $-4\cos^2(x) + (2\sqrt{3} - 2)\cos(x) + \sqrt{3}$ .

**2 Fin du Chapitre**