Chapitre 5. Cosinus et Sinus. Cours.

Boulanger Yann

2 décembre 2025

Table des matières

1 Définitions

Soit a un nombre réel et soit M le point image de a sur le cercle trigonométrique.

Dans le repère $(O; I, J)$:

- l'abscisse de M est appelé le **cosinus de** a, noté $\cos(a)$;
- l'ordonnée de M est appelé le **sinus de** a, noté $\sin(a)$;
- le point M a pour coordonnées $M(\cos(a); \sin(a))$.

Exemple :
Le réel $\dfrac{\pi}{2}$ a pour point image $J(0; 1)$ alors $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

Propriétés

Pour tout réel a, on a :

-1 $\leq \cos(a) \leq 1$ -1 $\leq \sin(a) \leq 1$ $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$

Remarque :
$(\cos(a))^2$ peut se noter $\cos^2(a)$

Démonstrations :

On considère le point H de l'axe des abscisses tel que (MH) est perpendiculaire à (OI).
On a alors : $OH = \cos(a)$ et $HM = \sin(a)$
Le cercle trigonométrique est de centre O l'origine du repère et a pour rayon 1 alors les abscisses et les ordonnées du point M sont comprises entre -1 et 1.
Donc $-1 \leq \cos(a) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(a) \leq 1$.
Le repère $(O; I, J)$ est orthonormé alors le triangle OHM est rectangle en H.
D'après le théorème de Pythagore, on a : $OH^2 + HM^2 = OM^2$ or $OM = 1$ $OH^2 + HM^2 = 1$
Donc $(\cos(a))^2 + (\sin(a))^2 = 1$.

2 Lien avec le sinus et le cosinus dans le triangle rectangle

Pour tout nombre $a \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ d'image M, on considère le point H de laxe des abscisses tel que (MH) est perpendiculaire à (OI).
Dans le triangle OHM rectangle en H, on a :

$$\cos(a) = OH = \frac{OH}{1} = \frac{OH}{OM} = \frac{\text{côté adjacent à } \widehat{HOM}}{\text{hypoténuse}} = \cos \widehat{HOM}$$

$$\sin(a) = HM = \frac{HM}{1} = \frac{HM}{OM} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{HOM}}{\text{hypoténuse}} = \sin \widehat{HOM}$$

3 Valeurs remarquables du sinus et du cosinus

Certaines valeurs remarquables de $\cos(a)$ et $\sin(a)$ sont à connaître pour des valeurs de a données. Elles correspondent à des positions remarquables du point M sur le cercle trigonométrique.

$\widehat{IOM}$	0°	30°	45°	60°	90°
réel a associé	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(a)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(a)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Démonstrations :

Pour $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

En notant M le point du cercle trigonométrique associé à $\frac{\pi}{3}$, l'angle $\widehat{IOM}$ mesure 60°. Le triangle OIM est donc équilatéral.
La hauteur (MH) est donc aussi une médiane du triangle OIM, avec H milieu de $[OI]$
On en déduit que : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{OH}{OM} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Pour $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

De plus que précédemment : $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{HM}{OM} = \frac{HM}{1} = HM$
Dans le triangle OMH rectangle en H, daprès le théorème de Pythagore, on a :
$OH^2 + HM^2 = OM^2$ alors $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + HM^2 = 1$ donc $HM^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
doù $\quad HM = \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad$ donc $\quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

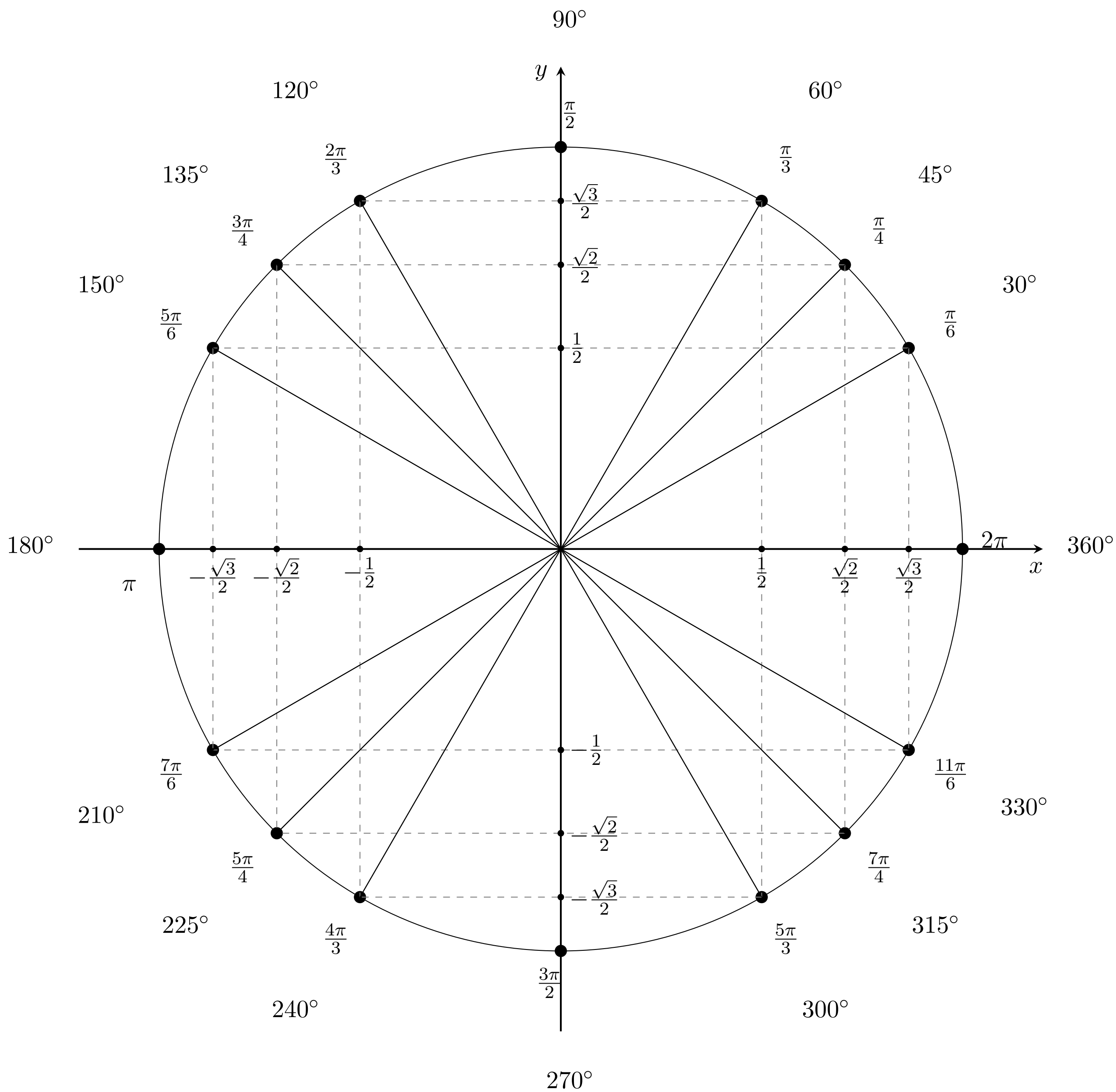
Pour $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

En notant M le point du cercle trigonométrique associé à $\frac{\pi}{4}$ et H le projeté orthogonal sur l'axe des abscisses, le triangle OMH est rectangle en H tel que langle $IOM = 45°$
Le triangle OMH est donc également isocèle en H. Ainsi $OH = HM$.
On en déduit que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{OH}{OM} = \frac{OH}{1} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{HM}{OM} = \frac{HM}{1} = HM \quad \text{d'où} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = HM$$

D'après le théorème de Pythagore, on a :
$OH^2 + HM^2 = OM^2$ alors $2HM^2 = 1$ d'où $HM^2 = \frac{1}{2}$
donc $\quad HM = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad$ donc $\quad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad$ et $\quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Cercle trigonométrique **Complet**



Fin du Chapitre