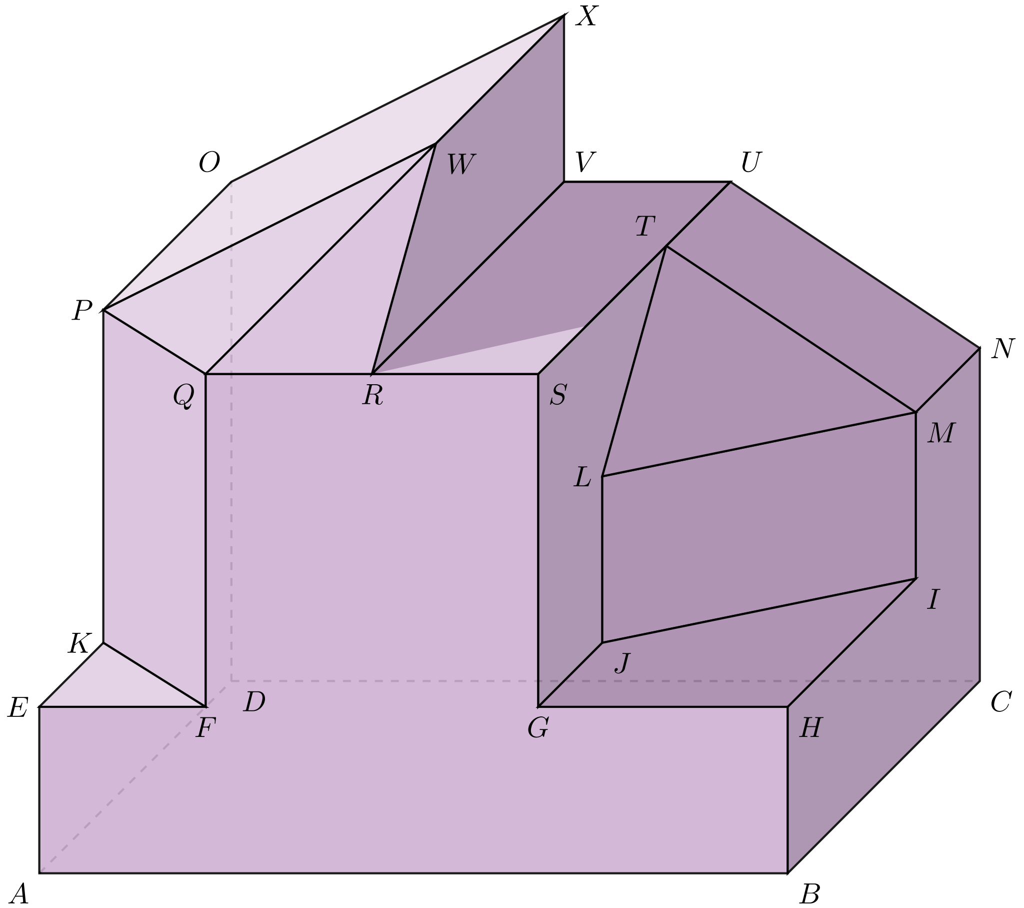
Feuille d'exercices - Géométrie dans l'espace - Part 1

Positions relatives de droites et de plans

Exercice 1 ....

On considère le projet de maison suivant :



Cette maquette a été taillée dans un cube dont $ABCD$ était la face du dessous. On sait que :

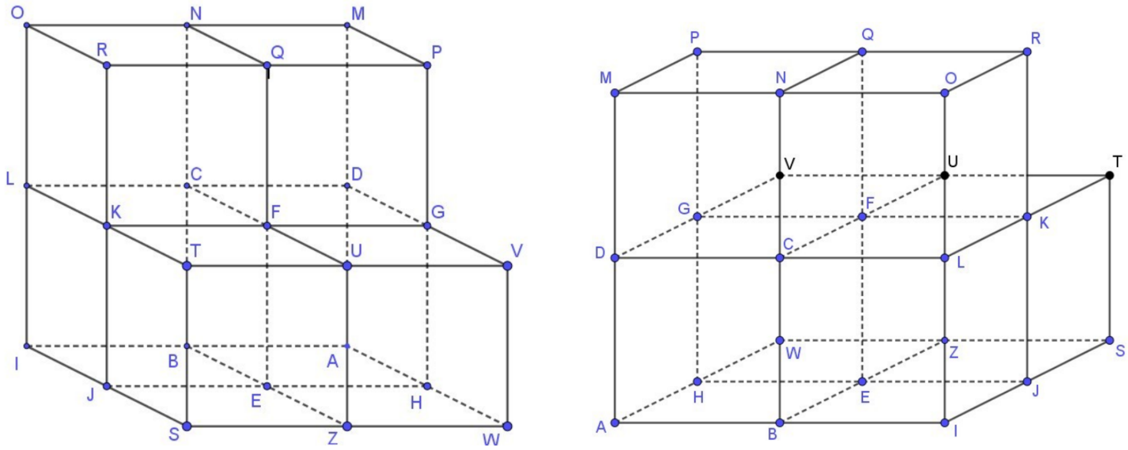
- $ABHGSQFE$, $BCNMIB$, $CNUVXOD$ et $ADOPKEA$ sont des restes des faces latérales du cube de base ;
- Les points H, I, J et G, appartiennent au plan (EFK) ;
- Les points O, P, Q, R, S, T, U et V sont coplanaires ;
- Les points X, V, W et R appartiennent à un même plan, qui est parallèle aux plan (GJS) et (BCN) ;
- $KFQP$ est un rectangle ;
- Les plans (UGR) et (HIJ) sont parallèles au plan (ABC) ;
- Enfin, Les points U, T et S sont alignés et appartiennent au plan (JLG).

1. Compléter, sans justifier, les phrases suivantes, afin d'en faire des affirmations vraies :
   a. Les droites ... et ... sont parallèles.
   b. Les droites ... et ... ne sont ni parallèles, ni sécantes.
   c. Les droites ... et ... ne sont ni parallèles.
   d. Les droites ... et ... ne sont pas coplanaires.
   e. Les droites ... et ... ne sont ni parallèles, ni orthogonales.
   f. Les droites ... et ... sont coplanaires.
   g. Les droites ... et ... sont orthogonales, non sécantes.
   h. Les droites ... et ... sont orthogonales, non perpendiculaires.
   i. Les droites ... et ... sont perpendiculaires.
2. Compléter, sans justifier, les phrases suivantes, afin d'en faire des affirmations vraies :
   a. Les plans ...... et ...... sont parallèles.
   b. Les plans ...... et ...... ne sont pas parallèles.
   c. Les plans ...... et ...... sont orthogonaux.
   d. Les plans ...... et ...... ne sont ni orthogonaux, ni parallèles.
   e. Les plans ...... et ...... sont sécants et leur intersection est la droite (TL).
   f. Les plans ...... et ...... sont sécants et leur intersection est la droite (UN).
3. Compléter, sans justifier, les phrases suivantes, afin d'en faire des affirmations vraies :
   a. La droite ... appartient au plan ....
   b. La droite ... n'appartient pas au plan (QGA).
   c. La droite ... appartient au plan (JLT).
   d. La droite ...est parallèle au plan (EFK).
   e. La droite (UT) et le plan (ABE) sont sécants au point ....
   f. La droite ... est perpendiculaire au plan (ABC).
   g. L'intersection de la droite (VS) avec le plan (UTR) est ....
   h. L'intersection des plans (STL) et (JGU) est ....
   i. Les plans (MIJ) et (USG) sont sécants en ....
   j. Les plans (EKF) et (HIJ) sont ....
4. Pour chacune des affirmations, dire si elle est vraie ou fausse.
   a. Les plans (USG) et (PQF) ne sont pas sécants.
   b. Les droites (KF) et (IJ) ne sont pas coplanaires.
   c. Les plans (ABC) et (PQW) ne sont pas sécants.
   d. La droite (UN) est parallèle au plan (ABQ).

Repères, bases et coordonnées

Exercice 2 – Coordonnées de points et de vecteurs . . . .

Voici une structure de jeu pour enfants vue sous deux angles différents dans l'espace.



1. Dans le repère $\left(I;\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IL}\right)$, déterminer les coordonnées des points K, G, P et Z.
2. Dans le repère $\left(W;\overrightarrow{WH},\overrightarrow{WV},\overrightarrow{WZ}\right)$, déterminer les coordonnées des points K, G, P et Z.
3. Dans le repère $\left(U;\overrightarrow{UV},\overrightarrow{GD},\overrightarrow{TS}\right)$, déterminer les coordonnées des points K, G, P et Z.
4. Dans la base $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MD},\overrightarrow{MP}\right)$, déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DU}$, $\overrightarrow{CZ}$ et $\overrightarrow{KW}$.
5. Dans la base $\left(\overrightarrow{KG},\overrightarrow{KT},\overrightarrow{KR}\right)$, déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DU}$, $\overrightarrow{CZ}$ et $\overrightarrow{KW}$.
6. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{UL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{WH}$ et $\overrightarrow{EI}$.

Exercice 3 . . . .

Dans l'espace, on considère les égalités vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{OM} = 5\vec{u} + 8\vec{v} - 4\vec{w}$$

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{EF} - 6\overrightarrow{PL}$$

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$.
3. Déterminer les coordonnées du point M dans le repère $(O\,;\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$.
4. Déterminer les coordonnées du point O dans le repère $(M\,;\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$.
5. Déterminer les coordonnées du point B dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{PL}\right)$.
6. Déterminer les coordonnées du point F dans le repère $\left(E\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PL}\right)$.

Exercice 4 – Colinéarité de deux vecteurs

Soit $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ un repère de l'espace. On considère les vecteurs :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix},\qquad \vec{v}\begin{pmatrix}12,6\\31,5\\18,9\end{pmatrix},\qquad \vec{w}\begin{pmatrix}-6\\-24\\-9\end{pmatrix}\qquad \text{et}\qquad \vec{r}\begin{pmatrix}-20\\-50\\-30\end{pmatrix}$$

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
2. Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{r}$ sont-ils colinéaires ?
3. Les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 5

Dans un repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère les points $A(2;1;5)$, $B(4;-3;12)$, $C(8,8;-12,6;28,8)$ et $D(32;11;-6)$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2. Les points A, B et D sont-ils alignés ?

Exercice 6

Dans un repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$de l'espace, on note les coordonnées de trois planètes A, B et C le 12 juillet 2022 :

$$A(-2;2;6),\qquad B(9;5;3)\qquad \text{et}\qquad C(-105,4;-26,2;34,2)$$

Les planètes A, B et C sont-elles alignées ?

Exercice 7

Dans un repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère les points $A(3;2;1)$, $B(-2;5;2)$, $C(4;-2;6)$ et $D(6;-1;\frac{38}{17})$.

1. Les points A, B et C définissent-ils un plan ?
2. Le point D appartient-il au plan (ABC) ?

Représentation paramétrique de droite

Exercice 8

Soit $\left(\text{O} ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère de l'espace.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point $A(1;0;-4)$ dont un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix}$.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par le point $B(-2;9;1)$ dont un vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-3\\2\end{pmatrix}$.

Exercice 9

Soit $\left(\text{O} ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère de l'espace.

1. Déterminer trois points et trois vecteurs directeurs de la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 6 - 9t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

2. Déterminer un vecteur directeur de la droite Δ_1 dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2 - 3k \\ y = 10k \\ z = 7 + 6k \end{cases}, \qquad k \in \mathbb{R}$$

3. Les droites Δ et Δ_1 sont-elles parallèles ?

Exercice 10

Dans un repère $\left(\text{O} ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 5 - 12t \\ y = 1 \\ z = -4 + 9t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

1. Le point $A(-31;1;23)$ appartient-il à la droite Δ ?
2. Donner les coordonnées d'un point B qui n'appartient pas à Δ.
3. Donner une autre représentation paramétrique de la droite Δ.
4. Écrire une représentation paramétrique d'une droite Δ_1 parallèle à Δ.

Exercice 11 ....

Dans un repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, on considère les points $A(2;6;-4)$, $B(-4;5;1)$ et $C(5;5;5)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. Déterminer une représentation de la droite Δ parallèle à (AB) passant par C.
3. Le point $E(20;9;-19)$ appartient-il à la droite (AB) ?

Exercice 12 – Intersection de droites ....

Dans un repère $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère les droites Δ_1 et Δ_2 de représentations paramétriques :

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 5 - 12t \\ y = 3 + 4t \\ z = -4 + 9t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \Delta_2 : \begin{cases} x = -3 - 20k \\ y = 7 + 6k \\ z = 8 + 12k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

1. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont-elles sécantes ? Si oui, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
2. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont-elles coplanaires ?

Exercice 13 ....

Soit $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ un repère de l'espace. On définit par A et B les points de coordonnées respectives $(10;-3;6)$ et $(-1;2;9)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. Le point $C(-51,6;25;22,8)$ appartient-il à la droite (AB) ?
3. On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 2 + 53,9t \\ y = 3 - 24,5t \\ z = 1 - 14,7t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

   a. Citer les coordonnées d'un vecteur directeur de Δ.
   b. Les droites (AB) et Δ sont-elles parallèles ?
   c. Donner les coordonnées de deux points de votre choix situés sur Δ.

Exercice 14 ....

Soit $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ un repère de l'espace.Deux rayons Laser sont projetés dans le ciel.
Le premier est représenté par la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 5t \\ z = 3 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Le deuxième est représenté par la droite Δ_1 dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -1 - 4k \\ y = 43 + 2k \\ z = 8 + 3k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer les coordonnées d'un point de Δ, ainsi que les coordonnées d'un vecteur directeur.
2. Les droites représentant les rayons Laser sont-elles sécantes ? Si oui, quelles sont les coordonnées du point qu'ils éclaireront tous les deux ?

Exercice 15 ....

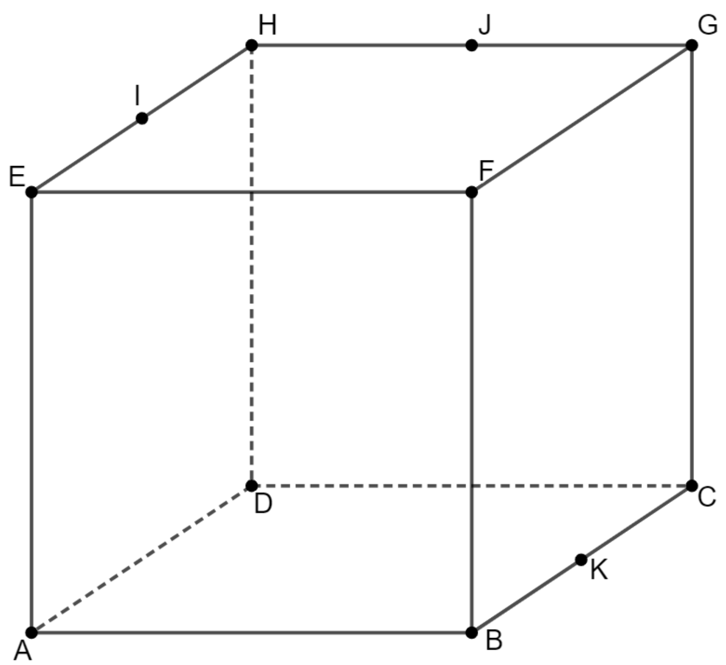
Dans un repère $\left(\text{O} ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère les droites Δ_1 et Δ_2 de représentations paramétriques :

$$\Delta_1 : \begin{cases} x = 7 + 12t \\ y = 8 - 6t \\ z = -2 - 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \Delta_2 : \begin{cases} x = 7k \\ y = 1 - 2k \\ z = -12,5 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

1. Déterminer deux points disctincts de Δ_1, ainsi qu'un vecteur directeur de Δ_1.
2. Déterminer deux points disctincts de Δ_2, ainsi qu'un vecteur directeur de Δ_2.
3. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont-elles parallèles ?
4. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont-elles sécantes ? Si oui, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
5. Les droites Δ_1 et Δ_2 sont-elles coplanaires ?

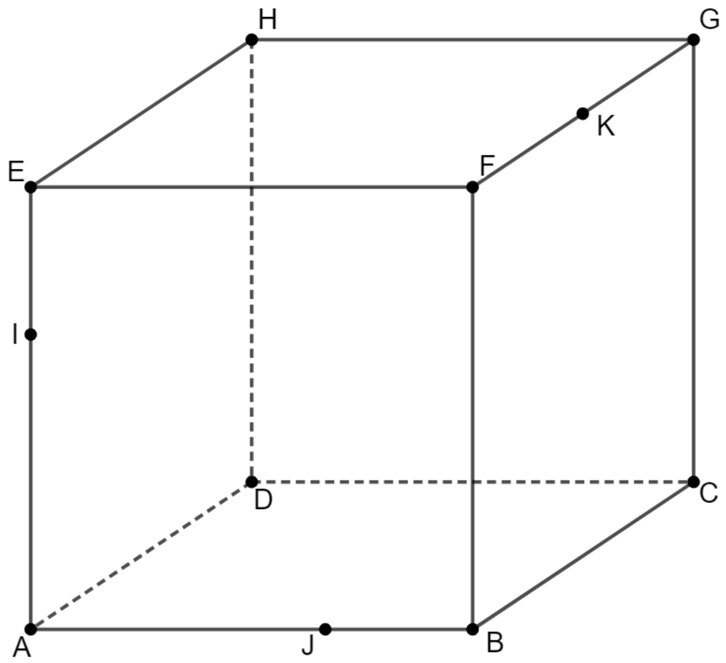
Exercice 16 – Section de cube 1 ....

Construire la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJK).



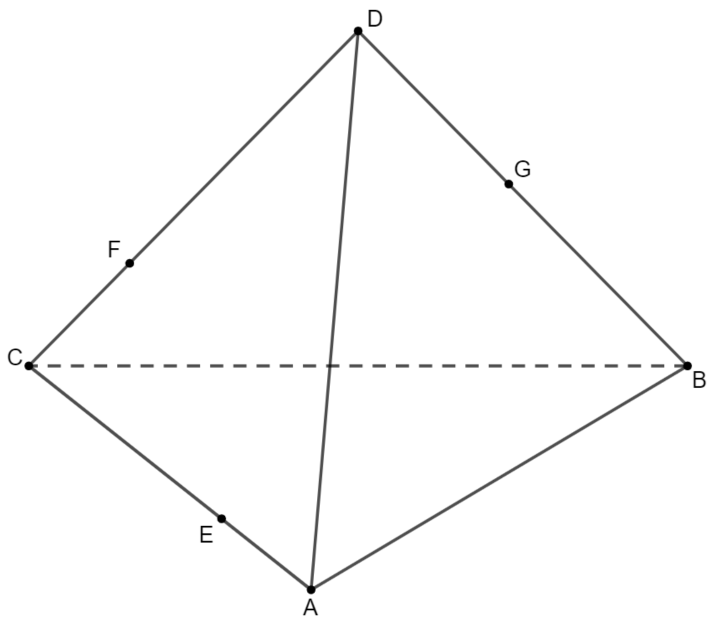
Exercice 17 – Section de cube 2 ....

Construire la section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJK).



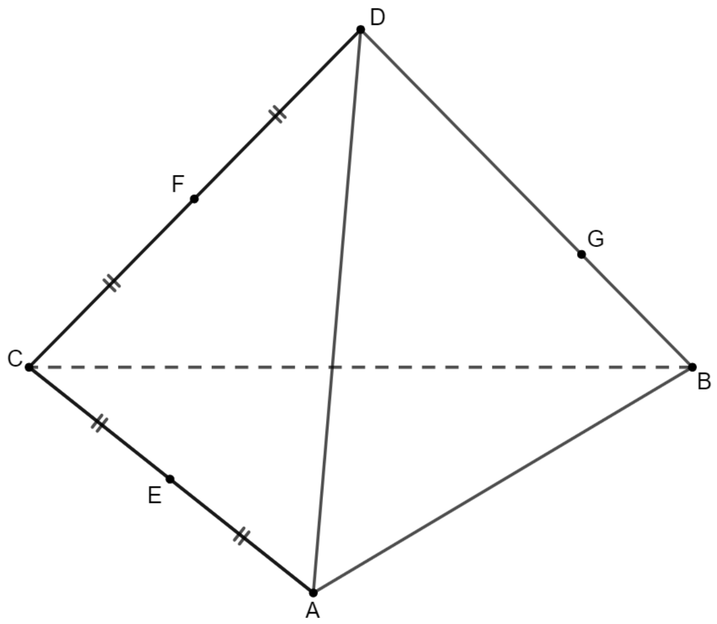
Exercice 18 – Section de tétraèdre 1 ....

Construire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (EFG).



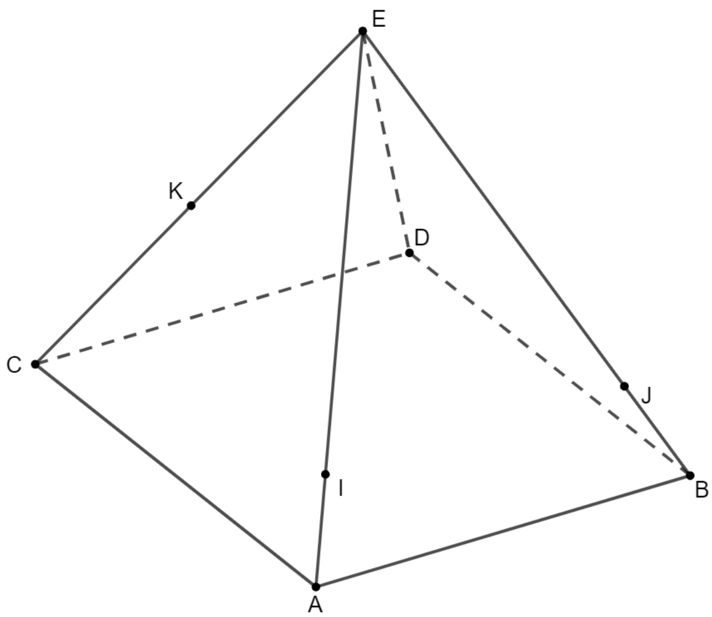
Exercice 19 – Section de tétraèdre 2 ....

Construire la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (EFG).
E est le milieu de $[AC]$ et F est le milieu de $[CD]$.
On rédigera une justification du placement du point K, intersection du plan (EFG) avec la droite (AB).



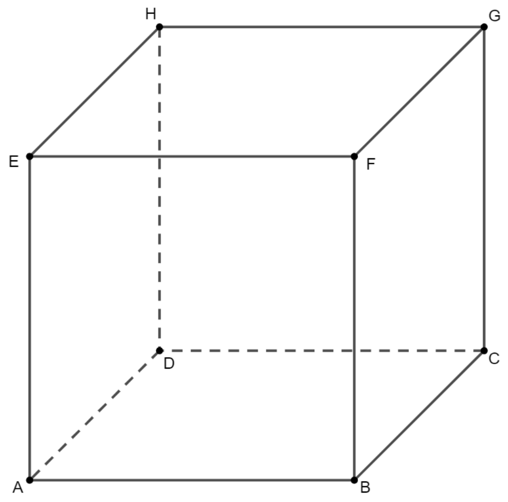
Exercice 20 – Section de pyramide à base carrée ....

Construire la section de la pyramide à base carrée $ABCDE$ par le plan (IJK).
I est le point tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$ et I est le point tel que $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BE}$.
On rédigera une justification du placement du point L, intersection du plan (IJK) avec la droite (ED).



Exercice 21 ....

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.



1. Placer les points I, J et K tels que
   - I est le milieu de $[EF]$
   - J est le milieu de $[EH]$
   - K est le point tel que $\overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$
2. On munit l'espace du repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE})$.
   a. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite (AE).
   b. Déterminer une base du plan (FHK).
   c. Démontrer que la droite (AE) et le plan (FHK) ne sont pas parallèles.