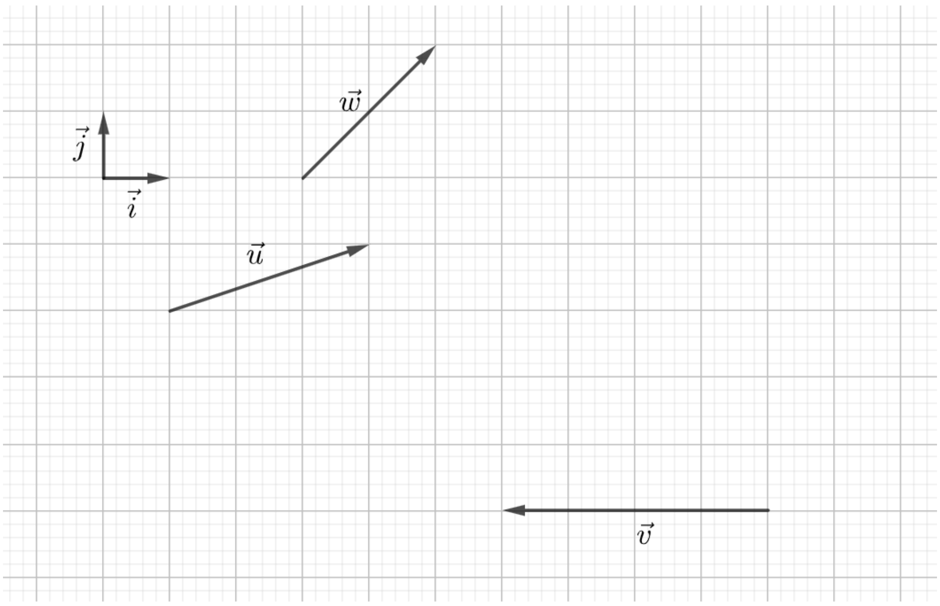
Feuille d'exercices - Vecteurs - Déterminant et colinéarité

Produit d'un vecteur par un réel

Exercice 1



Sur la figure ci-dessus, des vecteurs ont été représentés.

1. Déterminer graphiquement les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans la base $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.
2. Construire un représentant de chacun des vecteurs suivants :

$$\vec{t} = -2\vec{u} \qquad \vec{s} = \frac{5}{2}\vec{v} \qquad \vec{r} = 3\vec{w}$$

Exercice 2

Dans une base $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ orthonormée, on considère les vecteurs : $\vec{u}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}21\\10\end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées, dans la base $\left(\vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$, des vecteurs suivants :

$$\vec{w} = 3\vec{v} \qquad \vec{t} = 4\vec{v} - 2\vec{u} \qquad \vec{s} = -\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v} + \vec{w}$$

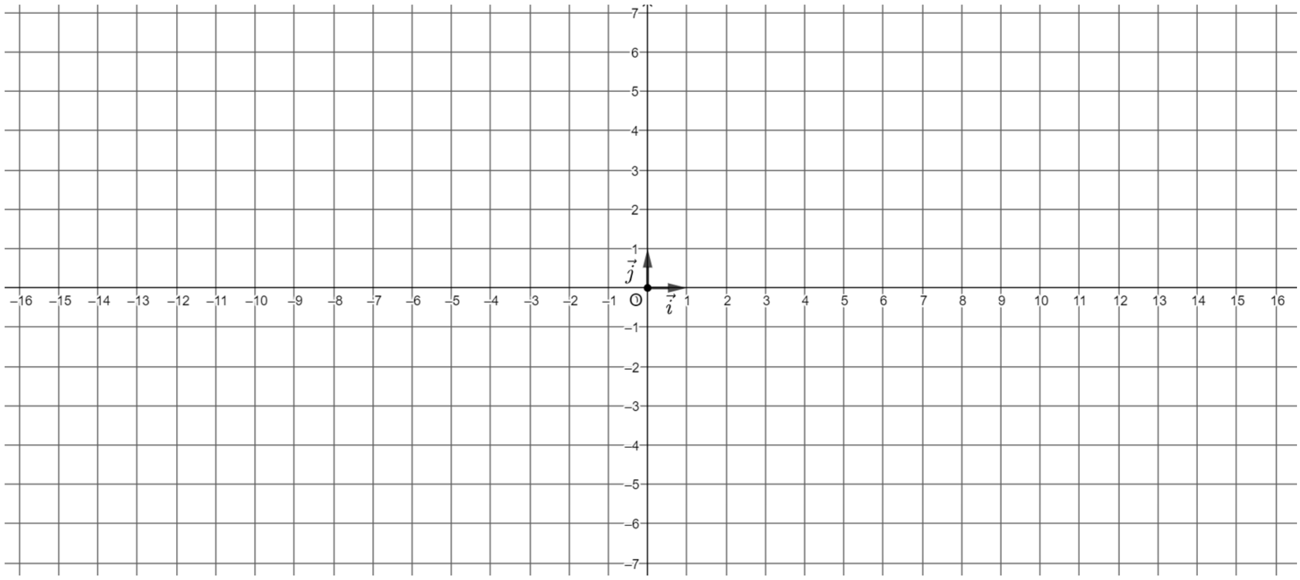
Exercice 3

Dans un repère orthonormé, on considère les points : $A(6\ ;\ 2)$, $B(3\ ;\ 5)$ et $C(-4\ ;\ 7)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $4\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que $\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{AB}$.

Colinéartié et critère de colinéarité

Exercice 4



1. Construire dans le repère ci-dessus un représentant de chacun des vecteurs : $\vec{u}\begin{pmatrix}8\\6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_1}\begin{pmatrix}-12\\-9\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_2}\begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_3}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_4}\begin{pmatrix}16\\12\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v_5}\begin{pmatrix}-8\\-6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_6}\begin{pmatrix}-10\\-7\end{pmatrix}$.
2. Parmi les vecteurs précédents, lesquels semblent colinéaires à $\vec{u}$?

Exercice 5

Montrer dans chaque cas, à l'aide du critère de colinéarité faisant intervenir le déterminant, si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou non.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-10\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}21\\28\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\21\end{pmatrix}$
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}24\\18\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-16\\12\end{pmatrix}$

Exercice 6

Dans un repère $\left(\text{O} ; \vec{i}, \vec{j}\right)$du plans, on considère les points : $A(-5;3)$, $B(-3;-1)$, $C(1;1)$, $D(4;-1)$, $E(-2;2)$, $F(-5;-7)$ et $G(0;-7)$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont-ils colinéaires ?
2. Les vecteurs $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont-ils colinéaires ?

Supplément facultatif :

3. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont-ils colinéaires ?
4. Les vecteurs $\overrightarrow{FC}$ et $\overrightarrow{EG}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 7

Dans une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$du plan, on considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Dans chaque cas, déterminer la valeur de x pour laquelle les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}2+x\\-3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}10\\12\end{pmatrix}$

Exercice 8

Dans le repère $\left(\text{O} ; \vec{i}, \vec{j}\right)$du plan, on considère les points : $A(2;-3)$, $B(5;-1)$, $M(x;1)$ et $N(-4;y)$.

1. Déterminer la valeur de x pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ soient colinéaires.
2. Déterminer la valeur de y pour que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}$ soient colinéaires.

Exercice 9 – Python

Écrire une fonction en langage Python qui prend en argument les coordonnées de deux vecteurs et renvoie la valeur du déterminant de ces deux vecteurs.

Applications de la colinéarité pour l'alignement et le parallèlisme

Exercice 10

Dans un repère $\left(\text{O} ; \vec{i}, \vec{j}\right)$du plan, on considère les points A, B, C, D et E qui permettent de définir les vecteurs suivants :
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2. Les droites (AE) et (CD) sont-elles parallèles ?
3. Les points A, C et D sont-ils alignés ?
4. Les droites (AD) et (CE) sont-elles parallèles ?

Supplément facultatif :

5. Les points A, B et E sont-ils alignés ?
6. Les droites (BE) et (AC) sont-elles parallèles ?

Exercice 11

Dans un repère $\left(\text{O} ; \vec{i}, \vec{j}\right)$du plan, on considère les points : $A(3;2)$, $B(7,3)$, $C(15;5)$, $D(-31;12)$, $E(-10;-3)$ et $F(18;-22)$.

1. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2. Les points D, E et F sont-ils alignés ?

Exercice 12 ....

Dans un repère $\left(\text{O} ~;~ \vec{i},~ \vec{j}\right)$du plan, on considère le triangle ABC tel que $A(-1;2)$, $B(-3;-2)$ et $C(5;4)$. Soient I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$.

1. Les droites (IJ) et (BC) sont-elles parallèles ?
2. Ce résultat était-il prévisible ? Expliquer pourquoi.

Exercices de synthèse

Exercice 13 ....

Dans un repère $\left(\text{O} ~;~ \vec{i},~ \vec{j}\right)$du plan, on considère les points $A(-3;-2)$, $B(7;3)$ et $C(-2;1)$.

1. Le point $D(-1;1)$ appartient-il à la droite (AB) ?
2. Déterminer les coordonnées du point E, symétrique de A par rapport au point C.
3. On considère les points M, N et P définis par :

$$3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\vec{0}~; \qquad 3\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NC}=\vec{0} \qquad \text{et } \overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

   a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   b. En déduire les coordonnées de M.
   c. Déterminer les coordonnées des points N et P.
   d. Montrer que les points M, N et P sont alignés.

4. Montrer que les points M, N et P sont alignés.

Exercice 14 ....

Dans un repère orthonormé $\left(\text{O} ~;~ \vec{i},~ \vec{j}\right)$du plan, on considère les points $A(-2;2)$, $B(5;6)$ et $C(4;-1)$.

1. Déterminer les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{MC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallèlogramme.
3. Déterminer les coordonnées de I milieu de $[CD]$, et montrer que les points I, M et B sont alignés.
4. Déterminer les coordonnées de J milieu de $[AB]$, et montrer que les droites (DJ) et (BI) sont parallèles.
5. Déterminer les coordonnées du point N tel que $-2\overrightarrow{JN}+3\overrightarrow{MN}=\vec{0}$, et montrer que les points B, C et N sont alignés.

Exercice 15 ....

Dans un repère orthonormé $\left(\text{O} ~;~ \vec{i},~ \vec{j}\right)$du plan, on considère les points $A(8;5)$, $B(4;7)$ et $C(2;3)$.

1. Montrer que le triangle ABC est isocèle en B.
2. Déterminer les coordonnées du point I milieu de $[AC]$.
3. Déterminer les coordonnées de G, centre de gravité du triangle ABC.