EXERCICE 1 **3 points**

1. $\left(\frac{5}{21}-\frac{38}{7}+\frac{30}{14}\right)\times\frac{42}{32}$

   Corrigé :

$$\begin{aligned}\left(\frac{5}{21}-\frac{38}{7}+\frac{30}{14}\right)\times\frac{42}{32} &= \left(\frac{5}{21}-\frac{114}{21}+\frac{45}{21}\right)\times\frac{42}{32}\\ &= \left(\frac{5-114+45}{21}\right)\times\frac{42}{32}\\ &= \left(\frac{-64}{21}\right)\times\frac{42}{32}\\ &= \frac{-64\times 42}{21\times 32}=\frac{-64\times 2}{32}=\frac{-128}{32}=-4\end{aligned}$$

2. $\frac{2^4\times 5^3-8^2\times 25}{5\times(2^2)^2+4^3\times 5}$

   Corrigé :

$$\begin{aligned}\frac{2^4\times 5^3-8^2\times 25}{5\times(2^2)^2+4^3\times 5} &= \frac{16\times 125-64\times 25}{5\times 16+64\times 5}\\ &= \frac{2000-1600}{80+320}=\frac{400}{400}=1\end{aligned}$$

EXERCICE 2 **6 points**

1. $f(x)=(5x^2+x-1)^7$

   Corrigé :

$$f'(x)=7(5x^2+x-1)^6\times(10x+1)=(70x+7)(5x^2+x-1)^6$$

2. $g(x)=\sqrt{-3x^2-9x+1}$

   Corrigé :

$$g'(x)=\frac{-6x-9}{2\sqrt{-3x^2-9x+1}}=\frac{-3(2x+3)}{2\sqrt{-3x^2-9x+1}}$$

3. $h(x)=e^{7x^3-5x+1}$

   Corrigé :

$$h'(x)=(21x^2-5)e^{7x^3-5x+1}$$

4. $\zeta(t)=\frac{-3t^2+2t+1}{e^{2t-1}+2}$

   Corrigé :

$$\zeta'(t)=\frac{(-6t+2)(e^{2t-1}+2)-(-3t^2+2t+1)(2e^{2t-1})}{(e^{2t-1}+2)^2}$$

5. $\psi(z)=(3-2z)\sqrt{-z^2+4z+7}$

   Corrigé :

$$\begin{aligned}\psi'(z) &= -2\sqrt{-z^2+4z+7}+(3-2z)\times\frac{-2z+4}{2\sqrt{-z^2+4z+7}}\\ &= -2\sqrt{-z^2+4z+7}+\frac{(3-2z)(-2z+4)}{2\sqrt{-z^2+4z+7}}\end{aligned}$$

EXERCICE 3 **4 points**

Corrigé :
Soit $P(n)$ la propriété : "$u_n = 9 \times 2^n + 5$"
Initialisation : Pour $n = 0$:

$$u_0 = 14 \quad \text{et} \quad 9 \times 2^0 + 5 = 9 \times 1 + 5 = 14$$

Donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $u_n = 9 \times 2^n + 5$.
Montrons $P(n+1)$: $u_{n+1} = 9 \times 2^{n+1} + 5$
Par définition de la suite :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n - 5 \\ &= 2(9 \times 2^n + 5) - 5 \\ &= 18 \times 2^n + 10 - 5 \\ &= 9 \times 2^{n+1} + 5 \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 9 \times 2^n + 5$.

EXERCICE 4 **6 points**

1. **Signe de f sur $I = \mathbb{R} \setminus \{1\}$**
   Corrigé :
   - $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
   - Le signe de $f(x)$ est donc celui de $(x-1)$
   - $f(x) > 0$ si $x > 1$
   - $f(x) < 0$ si $x < 1$
2. a. **Dérivée de f**
   Corrigé :

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x \times 1}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

   b. **Tableau de variations**
   Corrigé :
   - $f'(x) = 0$ lorsque $x = 2$
   - $f'(x) > 0$ lorsque $x > 2$ (car $e^x > 0$, $(x-1)^2 > 0$, $x - 2 > 0$)
   - $f'(x) < 0$ lorsque $x < 2$ et $x \neq 1$

   Tableau de variations :

x $+\infty$	$-\infty$		1		2	
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	0	$+$
$f(x)$ $+\infty$	0^-	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	e^2	$\nearrow$

3. **a.** **Dérivée seconde**

Corrigé :

$$f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{[e^x(x-2)+e^x](x-1)^2 - e^x(x-2)\times 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{e^x(x-1)[(x-1)(x-1)-2(x-2)]}{(x-1)^4} = \frac{e^x(x^2-4x+5)}{(x-1)^3}$$

b. **Convexité**

Corrigé :

- $e^x > 0$ pour tout x
- $x^2-4x+5>0$ pour tout x (discriminant $\Delta = 16-20=-4<0$)
- Le signe de $f''(x)$ est donc celui de $(x-1)^3$
- $f''(x)>0$ lorsque $x>1$: f convexe sur $]1;+\infty[$
- $f''(x)<0$ lorsque $x<1$: f concave sur $]-\infty;1[$

c. **Tangente en** 0

Corrigé :

$$f(0) = \frac{e^0}{0-1} = -1$$

$$f'(0) = \frac{e^0(0-2)}{(0-1)^2} = -2$$

$$T_0 : y = f'(0)(x-0)+f(0) = -2x-1$$

d. **Inégalité**

Corrigé : Sur $]-\infty;1[$, f est concave donc sa courbe est en dessous de ses tangentes.

En particulier, pour $x \in]-\infty;1[$:

$$f(x) \leq -2x-1$$

$$\frac{e^x}{x-1} \leq -2x-1$$

Comme $x-1<0$, en multipliant par $(x-1)$ (qui est négatif), le sens de l'inégalité change :

$$e^x \geq (-2x-1)(x-1)$$

L'inégalité est stricte car la tangente ne touche la courbe qu'au point de tangence.

EXERCICE 5 **6 points**

1. **Détermination de** $g'(2)$
   Corrigé : La tangente au point $(2;0)$ passe par $(0;1,6)$.
   Le coefficient directeur de cette tangente est :
$$g'(2) = \frac{0-1,6}{2-0} = \frac{-1,6}{2} = -0,8$$
2. **Tangente en** $(-2;0)$
   a. **Point d'inflexion ?**
   Corrigé : La tangente traverse la courbe au point $(-2;0)$, donc c'est un point d'inflexion.
   b. **Détermination de** $g'(-1)$
   Corrigé : Par lecture graphique, la tangente en $x=-1$ est horizontale, donc $g'(-1)=0$.
3. **Détermination de** $g'(0)$ **et** $g''(0)$
   Corrigé :
   - $g'(0)$: La tangente en 0 a pour coefficient directeur environ $0,72$
   - $g''(0)$: La courbe change de concavité en 0, donc $g''(0)=0$
4. **Comparaisons**
   Corrigé :
   a. $g'(1) > 0$ (la fonction est croissante en $x=1$)
   b. $g'(-3) > g'(-1)$ (la pente est plus forte en -3 qu'en -1)
   c. $g''\left(-\frac{7}{2}\right) > g''\left(\frac{5}{2}\right)$ (concavité plus marquée à gauche)
   d. $g''(3) > 0$ (la fonction est convexe en $x=3$)
5. **Courbes de** g' **et** g''
   Corrigé :
   - C' (dérivée) : la courbe rouge (c'est la seule qui s'annule aux extrema de g)
   - C'' (dérivée seconde) : la courbe verte (c'est la seule qui s'annule aux points d'inflexion de g)

EXERCICE BONUS **2 points**

Corrigé :
Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{2n}+2^{6n-5}$ est multiple de 11.
Soit $P(n)$: "$11 \mid 3^{2n}+2^{6n-5}$"
Initialisation : Pour $n=0$:
$$3^0+2^{-5} = 1+\frac{1}{32}$$
Ce n'est pas un entier, donc on commence à $n=1$:
Pour $n=1$:
$$3^2+2^1 = 9+2 = 11$$
$11 \mid 11$, donc $P(1)$ est vraie.
Hérédité : Supposons $P(n)$ vraie pour un certain $n \geq 1$:
$$3^{2n}+2^{6n-5} = 11k \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Montrons $P(n+1)$:

$$\begin{aligned}3^{2(n+1)}+2^{6(n+1)-5} &= 3^{2n+2}+2^{6n+1}\\ &= 9\times 3^{2n}+2^{6}\times 2^{6n-5}\\ &= 9\times 3^{2n}+64\times 2^{6n-5}\\ &= 9(3^{2n}+2^{6n-5})+55\times 2^{6n-5}\\ &= 9\times 11k+11\times 5\times 2^{6n-5}\\ &= 11(9k+5\times 2^{6n-5})\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 3^{2n}+2^{6n-5}$ est multiple de 11.