Chapitre 3. PGCD et ses applications. Exercices.

Boulanger Yann

16 octobre 2025

Table des matières

1 Calcul de pgcd

Exercice 1
Déterminer rapidement le pgcd des paires d'entiers suivants :

1. 35 et 63.
2. 26 et 78 .
3. 52 et 143 .
4. 150 et 25 .

Exercice 2
Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que pgcd(72, n) $= 6$ et $n \leq 72$.

Exercice 3
Déterminer l'ensemble des couples $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que :

1. $mn = 5400$ et $\text{pgcd}(m, n) = 15$.
2. $m^2 - n^2 = 1620$ et $\text{pgcd}(m, n) = 6$.

Exercice 4
Déterminer l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a + b = 72$ et $\text{pgcd}(a, b) = 9$.

Exercice 5
On définit, pour tout entier $n \geq 1$, la suite (u_n) par

$$u_n = \frac{1}{n} \times \text{pgcd}(24, n).$$

La suite (u_n) est-elle convergente ?

2 Algorithme d'Euclide

Exercice 6
Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer le PGCD de 246 et 189.

Exercice 7
Justifier que :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{pgcd}(26\,n + 7, n)$ est 7 si n est un multiple de 7 et 1 si n n'est pas un multiple de 7.

Exercice 8
Soit n un entier naturel non nul.

1. Démontrer que le reste de la division euclidienne de $21n + 4$ par $16n + 3$ est $5n + 1$.
2. (a) Effectuer la division euclidienne de $16n + 3$ par $5n + 1$.
   (b) En déduire que $\text{PGCD}(21\,n + 4, 16n + 3) = 1$.
3. En suivant le même raisonnement, déterminer le $\text{PGCD}(18\,n + 7, 2n + 1)$.

Exercice 9
Soit n un entier naturel non nul.
Quand on divise 364 par n, le reste vaut 12 et quand on divise 140 par n, le reste vaut 2.

Quelles sont les valeurs possibles de n ?

Exercice 10
Soient n un entier naturel, $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$.

1. Montrer que $\mathrm{pgcd}(\alpha, \beta)$ divise 5.
2. Montrer que si $n \equiv 2[5]$, alors 5 est un diviseur commun à α et β.
3. En déduire que $\mathrm{pgcd}(\alpha, \beta) = 5$ si, et seulement si, $n \equiv 2[5]$.

Exercice 11
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Montrer que le pgcd de $n^2 - 1$ et $3(n + 1)$ vaut $3(n + 1)$ si $n \equiv 1[3]$ et $n + 1$ sinon.

3 Théorème de Bézout

Exercice 12
Justifier l'existence d'un couple d'entiers (u, v) tels que $130u + 231v = 1$ et en déterminer un.

Exercice 13

1. Démontrer que les nombres 24 et 13 sont premiers entre eux.
2. Déterminer alors deux entiers relatifs u et v tels que $24u + 13v = 1$.

Exercice 14
Justifier l'existence d'un couple (u, v) d'entiers vérifiant $31u + 70v = 1$ puis en déterminer un.

Exercice 15
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Montrer à l'aide du théorème de Bézout que $5n - 7$ et $2n - 3$ sont premiers entre eux.

Exercice 16
Déterminer, en justifiant, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $2^{445} \equiv 2[15]$.
2. $\mathrm{pgcd}(2^{445} + 4, 15) = 3$.

Exercice 17
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $\mathrm{pgcd}(4n + 3, 2n + 1) = 1$.

4 Équations diophantiennes

Exercice 18
À l'aide de la remontée de l'algorithme d'Euclide, déterminer un inverse de 134 modulo 57.
Autrement dit, déterminer un entier a tel que $134\text{a} \equiv 1[57]$.

Exercice 19
Pour chacun des nombres suivants, déterminer s'il est inversible modulo 33 et, le cas échéant, en donner un inverse : $a = 3, b = 8, c = 44, d = 10, e = 5$.

Exercice 20
Déterminer, si elle existe, une solution particulière des équations diophantiennes suivantes :

1. $336u + 445v = 1$.
2. $426u - 68v = 2$.

Exercice 21
Pour quelles valeurs entières n l'équation $24x + 32y = n$ admet-elle des solutions entières ?

5 Théorème de Gauss

Exercice 22
Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

1. $38x - 65y = 0$
2. $76x = 112y$.

Exercice 23
Lister l'ensemble des couples d'entiers naturels (x, y) tels que : $7x = 19y$ et $x \leq 100$.

Exercice 24
Déterminer l'ensemble des entiers x tels que :

1. $8x \equiv 0[55]$.
2. $6x \equiv 12[35]$.

6 Synthèse

Exercice 25
Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que $6 \mid 4n$ et $4 \mid 5n$.

Exercice 26

1. Déterminer l'unique couple $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\text{pgcd}(a, b) = 21$ et $3a = 5b$.
2. Déterminer l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\text{pgcd}(a, b) = 18$ et $7a = 4b$.

Exercice 27 : D'après bac S
Un magicien propose le tour suivant :
« *Multipliez par 12 le numéro de votre jour de naissance.*
Ajoutez à ce résultat le numéro de votre mois de naissance multiplié par 31.
Je vais deviner votre date de naissance. »

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E_0) : $12x = 31y$.
2. Déterminer une solution particulière dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation (E_1) : $12x + 31y = 1$.
3. Déterminer une solution particulière $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation (E) : $12x + 31y = 503$.
4. Montrer que si $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est solution (E), alors le couple $(x - x_0, y - y_0)$ est solution de (E_0). En déduire l'ensemble des solutions de (E).
5. Justifier que (E) admet une unique solution vérifiant $1 \leq y \leq 12$ et la déterminer. Quelle est la date de naissance d'une personne obtenant 503 ?

Exercice 28

Déterminer les couples $(a;b)$ d'entiers naturels tels que $a \leq b$ vérifiant :

1. $a+b=296$ et $\text{pgcd}(a;b)=37$.
2. $ab=7776$ et $\text{pgcd}(a;b)=18$.

Exercice 29

1. Existe-t-il des entiers relatifs n tels que 3 divise n^2+1 ?
2. En déduire, quel que soit $n \in \mathbb{Z}$, le pgcd $\left(7n^2+4, n^2+1\right)$.

Exercice 30

Dans $\mathbb{Z}^2$, nous considérons l'équation $x+y-1=\text{pgcd}(x,y)$ (E).

1. Justifier que si (x,y) est une solution de (E), alors $\text{pgcd}(x,y)=1$. En déduire que si (x,y) est une solution de (E), alors x est impair.
2. Déterminer l'ensemble de solutions de (E).

Fin de chapitre