

EXERCICE 1**4 points**

On considère les deux nombres complexes z_1 et z_2 définis par : $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 5 - 2i$
 Déterminer l'écriture algébrique ($a + ib$) des nombres suivants :

- $z_1 + z_2 = (1 + i) + (5 - 2i) = 1 + 5 + i - 2i = 6 - i$
- $z_1 - 2z_2 = (1 + i) - 2(5 - 2i) = 1 + i - 10 + 4i = -9 + 5i$
- $z_1 \times z_2 = (1 + i)(5 - 2i) = 1 \times 5 + 1 \times (-2i) + i \times 5 + i \times (-2i)$
 $= 5 - 2i + 5i - 2i^2 = 5 + 3i + 2 = 7 + 3i$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i}{5 - 2i} = \frac{(1 + i)(5 + 2i)}{(5 - 2i)(5 + 2i)} = \frac{5 + 2i + 5i + 2i^2}{25 + 4}$
 $= \frac{5 + 7i - 2}{29} = \frac{3 + 7i}{29} = \frac{3}{29} + \frac{7}{29}i$

EXERCICE 3**7 points**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- $iz + 2z = i - 1$
 Factorisons : $z(i + 2) = i - 1$
 $z = \frac{i - 1}{2 + i} = \frac{(i - 1)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{2i - i^2 - 2 + i}{4 + 1} = \frac{2i + 1 - 2 + i}{5} = \frac{-1 + 3i}{5}$
 Donc $S = \left\{ -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i \right\}$
- $z^2 - 3z + 4 = 0$
 $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 - 16 = -7$
 $z_1 = \frac{3 - i\sqrt{7}}{2}$ et $z_2 = \frac{3 + i\sqrt{7}}{2}$
 Donc $S = \left\{ \frac{3 - i\sqrt{7}}{2}, \frac{3 + i\sqrt{7}}{2} \right\}$
- $z^4 + 4z^2 + 4 = 0$
 Posons $Z = z^2$, alors l'équation devient : $Z^2 + 4Z + 4 = 0$
 $(Z + 2)^2 = 0$ donc $Z = -2$
 Ainsi $z^2 = -2$ donc $z = i\sqrt{2}$ ou $z = -i\sqrt{2}$
 Donc $S = \{i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\}$
- $\bar{z} + i = 2z - 1$
 Soit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors $\bar{z} = x - iy$
 L'équation devient : $x - iy + i = 2(x + iy) - 1$
 $x - iy + i = 2x + 2iy - 1$
 $x - iy + i - 2x - 2iy + 1 = 0$
 $-x + 1 + i(-3y + 1) = 0$
 Par identification : $\begin{cases} -x + 1 = 0 \\ -3y + 1 = 0 \end{cases}$
 Donc $x = 1$ et $y = \frac{1}{3}$
 Ainsi $S = \left\{ 1 + \frac{i}{3} \right\}$

EXERCICE 2**2 points**

Déterminer le conjugué du nombre complexe suivant et l'écrire sous forme algébrique :

$$z = \frac{2+i}{1-2i}$$

Corrigé :

D'abord, mettons z sous forme algébrique :

$$z = \frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{2+4i+i+2i^2}{1+4} = \frac{2+5i-2}{5} = \frac{5i}{5} = i$$

Donc $z = i$

Le conjugué est : $\bar{z} = \bar{i} = -i$

EXERCICE 4**5 points**

Soit P le polynôme défini par : $P(z) = z^3 + 3z^2 + 11z + 9$.

1. Calcul de $P(-1)$:

$$P(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 + 11(-1) + 9 = -1 + 3 - 11 + 9 = 0$$

2. Recherche de p et q tels que $P(z) = (z+1)(z^2 + pz + q)$:

$$\text{Développons : } (z+1)(z^2 + pz + q) = z^3 + pz^2 + qz + z^2 + pz + q = z^3 + (p+1)z^2 + (p+q)z + q$$

Par identification avec $P(z) = z^3 + 3z^2 + 11z + 9$:

$$\begin{cases} p+1=3 \\ p+q=11 \\ q=9 \end{cases}$$

Donc $p=2$ et $q=9$

Ainsi $P(z) = (z+1)(z^2 + 2z + 9)$

3. Résolution de $P(z) = 0$ dans $\mathbb{R}$:

$$(z+1)(z^2 + 2z + 9) = 0$$

$$z+1=0 \text{ donne } z=-1$$

$z^2 + 2z + 9 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 4 - 36 = -32 < 0$, donc pas de solution réelle.

Donc $S_{\mathbb{R}} = \{-1\}$

4. Résolution de $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$:

$$z+1=0 \text{ donne } z=-1$$

$$z^2 + 2z + 9 = 0 \text{ a pour discriminant } \Delta = -32 = (4i\sqrt{2})^2$$

$$z = \frac{-2 \pm 4i\sqrt{2}}{2} = -1 \pm 2i\sqrt{2}$$

Donc $S_{\mathbb{C}} = \{-1, -1 + 2i\sqrt{2}, -1 - 2i\sqrt{2}\}$

EXERCICE 5**2 points**Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$$

Corrigé :Posons $Z = \frac{2z+1}{z-1}$, alors l'équation devient $Z^4 = 1$.Les solutions de $Z^4 = 1$ par factorisation sont les racines : $Z_0 = 1$, $Z_1 = i$, $Z_2 = -1$, $Z_3 = -i$.Pour chaque valeur de Z , résolvons $\frac{2z+1}{z-1} = Z$:

- Pour $Z = 1$: $\frac{2z+1}{z-1} = 1 \Rightarrow 2z+1 = z-1 \Rightarrow z = -2$
- Pour $Z = i$: $\frac{2z+1}{z-1} = i \Rightarrow 2z+1 = i(z-1)$
 $2z+1 = iz-i \Rightarrow 2z-iz = -i-1 \Rightarrow z(2-i) = -(1+i)$
 $z = \frac{-(1+i)}{2-i} = \frac{-(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-(2+i+2i+i^2)}{5} = \frac{-(2+3i-1)}{5} = \frac{-(1+3i)}{5}$
- Pour $Z = -1$: $\frac{2z+1}{z-1} = -1 \Rightarrow 2z+1 = -(z-1)$
 $2z+1 = -z+1 \Rightarrow 3z = 0 \Rightarrow z = 0$
- Pour $Z = -i$: $\frac{2z+1}{z-1} = -i \Rightarrow 2z+1 = -i(z-1)$
 $2z+1 = -iz+i \Rightarrow 2z+iz = i-1 \Rightarrow z(2+i) = i-1$
 $z = \frac{i-1}{2+i} = \frac{(i-1)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2i-i^2-2+i}{5} = \frac{2i+1-2+i}{5} = \frac{-1+3i}{5}$

$$\text{Donc } S = \left\{ -2, 0, -\frac{1+3i}{5}, \frac{-1+3i}{5} \right\}$$