Chapitre 3. Modes de génération d'une suite.

Boulanger Yann

2 octobre 2025

Table des matières

1 Introduction

La notion de suite est indissociable des procédures itératives utilisées dès l'Antiquité pour trouver des approximations de nombres irrationnels ou de grandeurs à mesurer : surfaces, volumes...
Les suites furent assez tôt utilisées de façon théoriques pour élaborer des solutions à des problèmes divers. Aujourd'hui, la théorie des suites fournit un cadre de modélisation pour les autres sciences : économiques, biologie, écologie, physique...

2 Définition et génération d'une suite

2.1 Notion de suite numérique

Il arrive que l'on demande, lors de tests psychotechniques par exemple, de compléter "logiquement" une suite de nombres.

Exemple

- suite des puissances de 2 (ou suite géométrique de raison 2) : $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$;
- suite des carrés : $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64$;
- suite arithmétique de raison 4 : $-3, 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25$;
- suite de Fibonacci : $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34$.

En mathématiques, une suite u est une liste ordonnée de nombres réels : les éléments de cette liste sont appelés termes de la suite u, et sont tous repérés par leur rang dans la liste ; ainsi le premier terme est souvent noté u_0, le second u_1 et ainsi de suite...

$$u = (\quad u_0 \quad ; \quad u_1 \quad ; \quad u_2 \quad ; \quad \dots \quad ; \quad u_{n-1} \quad ; \quad u_n \quad ; \quad u_{n+1} \quad ; \quad \dots \quad).$$

Définition 1
Une suite u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$. À chaque entier naturel n on associe un nombre réel u_n de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite qui à chaque entier naturel non nul associe son inverse :

$$u_1 = 1,\ u_2 = \frac{1}{2},\ u_3 = \frac{1}{3}, \dots,\ u_n = \frac{1}{n}, \dots$$

(on remarque qu'ici la suite commence à l'indice 1).

2.2 Modes de génération d'une suite

Une suite peut être engendrée de deux manières :

Définition 2
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie de manière explicite lorsque chaque terme u_n est défini en fonction de son rang n, indépendamment des autres termes :

$$u_n = f(n) \quad \text{où f désigne une fonction.}$$

Cette relation permet de calculer n'importe quel terme de la suite.

Exemple
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = -5 + 7n$:

$$\begin{aligned} u_0 &= -5 + 7 \times 0 = -5, \\ u_1 &= -5 + 7 \times 1 = 2, \\ u_2 &= -5 + 7 \times 2 = 9, \\ u_6 &= -5 + 7 \times 6 = 37. \end{aligned}$$

Définition 3
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence lorsque l'on connait son premier terme et une relation de la forme :

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{où f désigne une fonction.}$$

Cette relation de récurrence permet de calculer un terme de la suite à partir du terme précédent.

Exemple
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -2u_n + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = -2u_0 + 1 = -2 \times 3 + 1 = -5, \\ u_2 = -2u_1 + 1 = -2 \times (-5) + 1 = 11, \\ u_3 = -2u_2 + 1 = -2 \times 11 + 1 = -21. \end{cases}$$

L'inconvénient dans cet exemple est que des termes "éloignés" du début de la suite sont difficiles d'accès : pour calculer u_{100} il faut, a priori, calculer tous les termes précédents, jusqu'à u_{99} !

3 Sens de variation d'une suite

Définition

- Une suite (u_n) est dite **croissante** si pour tout entier n, $u_{n+1} \geq U_n$.
- Une suite (u_n) est dite **décroissante** si pour tout entier n, $U_{n+1} \leq U_n$.

Méthode pour étudier le sens de variation d'une suite :

Calculer et étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout n :

1. si pour tout n, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite (u_n) est **croissante**.
2. si pour tout n, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite (u_n) est **décroissante**.

Exemple : Soit (u_n), la suite définie par $u_n = n^2$.
Pour tout n,

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 \geq 0 \quad (\text{car } n \geq 0).$$

La suite (u_n) est donc **croissante**.

Fin de Chapitre