Chapitre 1. Arithmétique. Corrigés des Exercices

Boulanger Yann

1 septembre 2025

Table des matières

1 Diviseurs et multiples d'un nombre entier

1.1 La division euclidienne

1.1.1 Exercice 1

Le célèbre pirate Edward Teach dit « Barbe-noire », pille, en 1718, un navire chargé d'or.
Il dit à ses 300 hommes :
« Comptez ces pièces d'or.
Partagez-les de façon à ce que chacun en ait le même nombre et donnez-moi le reste ! »
Le décompte montre que le butin s'élève à 6850 pièces d'or.
Corrigé :
Effectuons la division euclidienne de 6850 par 300 :
6850ö300 $= 22(car 300 \times 22 = 6600)$
$Reste = 6850 - 6600 = 250$
Chaque pirate recevra 22 pièces d'or et Barbe-noire en recevra 250.
Le partage n'est pas si équitable au final !

1.1.2 Exercice 2

Le quotient d'une division euclidienne est 24 et son diviseur est 9.

a) Quels sont tous les restes possibles ?

b) En déduire tous les dividendes possibles de cette division

Corrigé :

a) Les restes possibles sont tous les entiers naturels compris entre 0 et 8 (car diviseur = 9).

b) $Dividende = diviseur \times quotient + reste = 9 \times 24 + r$
Pour $r = 0, 1, 2, ..., 8$, on obtient les dividendes :
$216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224$.

1.1.3 Exercice 3

Trouver le quotient et le reste de la division euclidienne de :

a) 45 par 7

b) 52 par 8

c) 76 par 12

d) 100 par 4

Corrigé :

a) 45ö7 $= 6 \times 7 + 3$, donc $quotient = 6, reste = 3$

b) 52ö8 $= 6 \times 8 + 4$, donc $quotient = 6, reste = 4$

c) 76ö12 $= 6 \times 12 + 4$, donc $quotient = 6, reste = 4$

d) 100ö4 $= 25 \times 4 + 0$, donc $quotient = 25, reste = 0$

1.1.4 Exercice 4

Dans chaque cas, poser et effectuer la division euclidienne de :

a) 845 par 23

b) 662 par 41

c) 336 par 19

Corrigé :

a) $845\text{ö}23 = 36 \times 23 + 17$, donc $quotient = 36, reste = 17$

b) $662\text{ö}41 = 16 \times 41 + 6$, donc $quotient = 16, reste = 6$

c) $336\text{ö}19 = 17 \times 19 + 13$, donc $quotient = 17, reste = 13$

1.1.5 Exercice 5

Le quotient d'une division euclidienne est 14, son reste est 3 et son diviseur est 7. Quel est le dividende ?
Corrigé :
$Dividende = diviseur \times quotient + reste = 7 \times 14 + 3 = 98 + 3 = 101$

1.2 Diviseurs et multiples

1.2.1 Exercice 6

1. Écrire trois phrases en utilisant les nombres 255 et 51 (sachant que $255 = 5 \times 51$) avec les mots « diviseur », « multiple » et « divise ».
2. Vrai ou Faux ? Coche la bonne réponse :

36 est un multiple de 6.	☒ VRAI	☐ FAUX
6 est un diviseur de 49.	☐ VRAI	☒ FAUX
12 est un multiple de 24.	☐ VRAI	☒ FAUX
184 est divisible par 2.	☒ VRAI	☐ FAUX
250 est divisible par 5.	☒ VRAI	☐ FAUX
252 est divisible par 9.	☒ VRAI	☐ FAUX

Corrigé :

1. Exemples de phrases :
   — 51 est un diviseur de 255.
   — 255 est un multiple de 51.
   — 51 divise 255.
2. Réponses déjà cochées dans le tableau.

1.2.2 Exercice 7

Déterminer tous les **diviseurs** des nombres suivants :

— 128 : $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$

— 56 : $1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56$

— 78 : $1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78$

1.2.3 Exercice 8

1. Une plaque identique rectangulaire de dimensions 280 cm et 315 cm doit être découpée en carrés identiques, sans perte.
   Quelle est la dimension maximale possible des carrés ?
   Diviseurs de 280 : $1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 20, 28, 35, 40, 56, 70, 140, 280$
   Diviseurs de 315 :$1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 35, 45, 63, 105, 315$
   Le plus grand diviseur commun est 35. Les carrés seront donc de taille 35 **cm sur** 35 **cm**.
2. Si on vend chaque carré ainsi découpé à $0,30$ € la pièce, combien gagnera-t-on d'argent en tout ?
   Nombre de carrés en longueur : 280ö35 = 8
   Nombre de carrés en largeur : 315ö35 = 9
   Total de carrés : $8 \times 9 = 72$
   Gain total : $72 \times 0,30$£ $= 21,60$£

1.3 Les critères de divisibilité

1.3.1 Exercice 9

Compléter le tableau ci-dessous.

Divisible par...	Diviseurs					
	2	3	4	5	9	10
5912	oui	non	oui	non	non	non
34200	oui	oui	oui	oui	oui	oui
54208	oui	non	oui	non	non	non
317	non	non	non	non	non	non
708	oui	oui	oui	non	non	non
317	non	non	non	non	non	non
708	oui	oui	oui	non	non	non
34200	oui	oui	oui	oui	oui	oui
317	non	non	non	non	non	non

2 Décomposition des nombres entiers en produit de nombres premiers

2.1 Les nombres premiers

2.1.1 Exercice 10

Appliquer les critères de divisibilité pour expliquer pourquoi chaque nombre n'est pas premier.

1. 145 : divisible par 5 (se termine par 5)
2. 381 : divisible par 3 ($3 + 8 + 1 = 12$, multiple de 3)
3. 372 : divisible par2 (nombre pair)
4. 156 : divisible par 2 (nombre pair)
5. 240 : divisible par 2, 3, 5, etc.
6. 175 : divisible par 5 (se termine par 5)

2.1.2 Exercice 11

Parmi les nombres suivants, lesquels sont premiers ?
27 (non) 37 (oui) 57 (non, divisible par 3) 87 (non, divisible par 3) 59 (oui)
69 (non, divisible par 3) 79 (oui) 89 (oui)

2.1.3 Exercice 12

Trouver tous les nombres premiers compris entre 80 et 90.
Corrigé :
83, 89

2.2 Décomposition en facteurs premiers

2.2.1 Exercice 13

Julien a écrit « $180 = 15 \times 12$ est la décomposition en produit de facteurs premiers de 180 ».
A-t-il raison ? Si non, donner la bonne décomposition.
Corrigé :
Non, Julien n'a pas raison car 15 et 12 ne sont pas premiers.
La bonne décomposition est : $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

2.2.2 Exercice 14

Décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers :

1. $56 = 2^3 \times 7$
2. $42 = 2 \times 3 \times 7$
3. $93 = 3 \times 31$
4. $110 = 2 \times 5 \times 11$
5. $550 = 2 \times 5^2 \times 11$
6. $320 = 2^6 \times 5$
7. $425 = 5^2 \times 17$
8. $1000 = 2^3 \times 5^3$

2.2.3 Exercice 15

1. Effectuer la décomposition en produit de facteurs premiers de 420 et de 330.
   $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$
2. Quel est le plus grand diviseur commun de ces deux nombres ?
   $PGCD(420, 330) = 2 \times 3 \times 5 = 30$

3 Applications

3.1 Fractions irréductibles

1. Décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers :
   (a) $68 = 2^2 \times 17$
   (b) $96 = 2^5 \times 3$
   (c) $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
2. Rendre irréductible chaque fraction :
   (a) $\frac{96}{68} = \frac{2^5 \times 3}{2^2 \times 17} = \frac{2^3 \times 3}{17} = \frac{24}{17}$
   (b) $\frac{180}{96} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 5}{2^5 \times 3} = \frac{3 \times 5}{2^3} = \frac{15}{8}$
   (c) $\frac{68}{180} = \frac{2^2 \times 17}{2^2 \times 3^2 \times 5} = \frac{17}{3^2 \times 5} = \frac{17}{45}$

3.1.1 Exercice 16

Rendre irréductible chaque fraction en décomposant le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers :

1. $\frac{48}{75} = \frac{2^4 \times 3}{3 \times 5^2} = \frac{2^4}{5^2} = \frac{16}{25}$
2. $\frac{126}{180} = \frac{2 \times 3^2 \times 7}{2^2 \times 3^2 \times 5} = \frac{7}{2 \times 5} = \frac{7}{10}$
3. $\frac{360}{252} = \frac{2\text{ş} \times 3^2 \times 5}{2^2 \times 3^2 \times 7} = \frac{2 \times 5}{7} = \frac{10}{7}$
4. $\frac{220}{100} = \frac{2^2 \times 5 \times 11}{2^2 \times 5^2} = \frac{11}{5}$

3.1.2 Exercice 17

Le grand livre de Merlin est ouvert à la double page de la recette de la potion magique pour être fort en maths.
Les numéros de ces deux pages sont composés chacun de trois chiffres différents.
Le produit de ces six chiffres est égal à 2400.
Quel est le numéro de la première page de la recette ?
Corrigé :
Décomposons 2400 en facteurs premiers : $2400 = 2^5 \times 3 \times 5^2$
Les pages sont consécutives, donc de la forme n et n+1.
Le produit de leurs chiffres est 2400.
Après essais, on trouve que 568 et 569 conviennent :
$5 \times 6 \times 8 \times 5 \times 6 \times 9 = 2400$
La première page est donc la page 568.

3.2 Recherche des diviseurs d'un nombre

3.2.1 Exercice 19

Un confiseur dispose de 126 bonbons au citron et de 98 bonbons à l'orange. Il souhaite faire plusieurs paquets identiques contenant chacun le même nombre de bonbons de chaque sorte.
Il veut aussi utiliser tous les bonbons.

1. (a) Le confiseur peut-il composer exactement 9 paquets de ce type ? Pourquoi ?
   Non, car 126ö9 = 14 (entier) mais 98ö9 $\approx 10,888...$ (non entier)
   (b) Que doit vérifier le nombre de paquets ?
   Le nombre de paquets doit être un diviseur commun à 126 et 98.
2. Quels sont les diviseurs communs à 126 et 98 ?
   Diviseurs de 126 : 1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63, 126
   Diviseurs de 98 : 1, 2, 7, 14, 49, 98
   Diviseurs communs : 1, 2, 7, 14
3. Indiquer toutes les possibilités en précisant pour chacune d'elles le nombre de paquets et leur composition.
   — 1 paquet : 126 bonbons citron + 98 bonbons orange
   — 2 paquets : 63 bonbons citron + 49 bonbons orange par paquet
   — 7 paquets : 18 bonbons citron + 14 bonbons orange par paquet
   — 14 paquets : 9 bonbons citron + 7 bonbons orange par paquet

3.2.2 Exercice 20

Olivia avait un paquet de 320 bonbons et un paquet de 280 chewing-gums qu'elle a partagés équitablement avec un groupe de personnes.
Il lui reste alors 5 bonbons et 10 chewing-gums.

1. On souhaite retrouver le nombre de personnes de ce groupe.
   Le nombre recherché est un diviseur de deux nombres, lesquels ?
   Bonbons distribués : $320 - 5 = 315$
   Chewing-gums distribués : $280 - 10 = 270$
   Le nombre de personnes doit être un diviseur commun à 315 et 270.

2. Calculer maintenant le nombre maximal de personnes du groupe.
   $PGCD(315, 270) = 45$
   Diviseurs communs : $1, 3, 5, 9, 15, 45$
   Le nombre maximal de personnes est 45.
3. Combien de bonbons et de chewing-gums chaque personne aura-t-elle ?
   Bonbons par personne : 315ö45 = 7
   Chewing-gums par personne : 270ö45 = 6

3.2.3 Exercice 21

1. Calcule le diviseur le plus grand commun à 480 et 560.
   PGCD(480, 560) = 80
2. Un artisan souhaite recouvrir une terrasse rectangulaire de 4,8 m de large et de 5,6 m de long à l'aide de dalles carrées identiques sans faire de découpe.
   Quelle mesure maximale du côté de chaque dalle doit-il choisir ?
   4,8 m = 480 cm, 5,6 m = 560 cm
   PGCD(480, 560) = 80 cm
   La dimension maximale des dalles est 80 cm.
3. Combien de dalles doit-il acheter ?
   Largeur : 480ö80 = 6 dalles
   Longueur : 560ö80 = 7 dalles
   Total : 6 × 7 = 42 dalles

3.3 Exercice 22

Une entreprise doit commander des boîtes en carton qui contiendront des pâtes de fruits.
Le cahier des charges est le suivant :

— Chaque boîte contient 36 pâtes de fruits.
— Les pâtes de fruits ont la forme de cubes d'arête 2 cm.
— Les boîtes ont la forme d'un pavé droit.
— 20 000 pâtes de fruits sont à ranger.
— L'entreprise cherche à commander le moins de carton possible.
— Le coût du carton est de 15,50 € le m².

Quel sera le coût de cette commande ?
Corrigé :
Nombre de boîtes nécessaires : 20000ö36 $\approx 555, 55$ß556 boîtes
Pour minimiser la surface de carton, il faut trouver la disposition optimale des 36 cubes dans la boîte.
$36 = 2^2 \times 3^2$, les dispositions possibles sont :
$1 \times 1 \times 36$, $1 \times 2 \times 18$, $1 \times 3 \times 12$, $1 \times 4 \times 9$, $1 \times 6 \times 6$, $2 \times 2 \times 9$, $2 \times 3 \times 6$, $3 \times 3 \times 4$
Calculons les surfaces pour chaque disposition (chaque cube fait 2 cm de côté) :
La meilleure disposition est $3 \times 3 \times 4$ qui donne une boîte de :
$(3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (4 \times 2) = 6 \times 6 \times 8cm$
Surface de carton par boîte :
$2 \times (6 \times 6) + 2 \times (6 \times 8) + 2 \times (6 \times 8) = 72 + 96 + 96 = 264cm^2 = 0,0264m^2$
Surface totale : $556 \times 0,0264 \approx 14,6784m^2$
Coût : $14,6784 \times 15,50 \approx 227,52$ €
Le coût de la commande sera d'environ $227,52$ €.

Fin du corrigé