Chapitre 1. Arithmétique

Boulanger Yann

01 septembre 2025

Table des matières

1 Diviseurs et multiples d'un nombre entier

1.1 La division euclidienne

Définition - La division euclidienne

Pour deux nombres entiers a et b avec $a \geq b > 0$, il existe un unique couple de nombres entiers q et r vérifiant :

$$a = b \times q + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < b$$

On dit que q est le quotient et r le reste dans la **division euclidienne du dividende** a par le **diviseur** b.

Remarque : Le diviseur ne peut pas être égal à 0.

Vocabulaire L'égalité $a = b \times q + r$ s'appelle l'égalité euclidienne.

Exemple

$$2025 = 31 \times 65 + 10$$

2025 est le dividende, 31 le diviseur, 65 le quotient et 10 le reste.
On constate que $10 < 65$. Cela correspond à la division posée avec une potence comme en sixième !

$$2025 = 3 \times 675$$

1.2 Diviseurs et multiples

Définition - Diviseurs et multiples

Quand le reste de la division euclidienne de a par b vaut 0 alors $a = b \times q$ où q est le quotient.
On dit alors que

— a est un **multiple** de b,

— b est un **diviseur** de a,

— a est **divisible** par b.

Exemple
3 est un diviseur de 2025.
675 est un diviseur de 2025.
2025 est un multiple de 3 et un multiple de 675.
2025 est divisible par 3 et divisible par 675.

1.3 Les critères de divisibilité

Propriété

Un nombre entier est divisible par :

— 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;

— 3 si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 ;

— 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est un multiple de 4 ;

— 5 si le chiffre des unités est 0 ou 5 ;

— 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.

Remarque

On peut mélanger ces critères :

— un nombre est divisible par 10 s'il est divisible par 5 et 2 ;

— un nombre est divisible par 6 s'il est divisible par 2 et 3.

2 Décomposition des nombres entiers en produit de nombres premiers

2.1 Les nombres premiers

Définition - Nombre premier

Un **nombre premier** est un nombre entier qui possède exactement deux diviseurs.

Propriété

Si un nombre entier est premier alors il est seulement divisible par 1 et lui-même.

Démonstration

Soit a un nombre entier.
$a = 1 \times a$ donc a est divisible par 1 et a est divisible par a.
1 et a sont deux diviseurs de a.
Si a est un nombre premier alors il possède exactement deux diviseurs : ce sont forcément 1 et a.

Remarque : 1 n'est pas un nombre premier, car il ne possède qu'un seul diviseur : lui-même !

Exemple

Voici la liste des 25 nombres premiers inférieurs à 100 :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

2.2 Décomposition en facteurs premiers

Théorème - Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout nombre entier positif strictement supérieur à 1 peut être écrit sous la forme d'un produit de nombres premiers.
Ce produit est unique à l'ordre des facteurs près.

Exemple

$$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2 \times 3^3$$
$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

Méthode - Comment décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers
Pour décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers, on divise ce nombre par les nombres premiers dans l'ordre croissant et on recommence avec le quotient jusqu'à obtenir un quotient égal à 1.
On divise donc par 2, 3, 5, 7, 11, 13...
Les critères de divisibilité sont très utiles dans cette situation.
Décomposons le nombre 3780

$$3780 = 2 \times 1890$$
$$1890 = 2 \times 945$$
$$945 = 3 \times 315$$
$$315 = 3 \times 105$$
$$105 = 3 \times 35$$
$$35 = 5 \times 7$$

Ainsi $3780 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7$

3 Applications

3.1 Fractions irréductibles

Définition - Fraction irréductible
a et b deux nombres entiers et $b \neq 0$
La fraction $\frac{a}{b}$ est une fraction irréductible si 1 est le seul diviseur commun de a et b.
Une fraction irréductible est donc une fraction que l'on ne peut pas simplifier.

Exemple
$\frac{75}{64}$ est irréductible car 75 est divisible par 1, 3, 5, 15 ,25 et 75 et 64 est divisible par 1, 2, 4, 8, 16, 32 et 64.
$\frac{76}{64}$ n'est pas irréductible car 76 et 64 sont divisibles par 2.
D'ailleurs $\frac{76}{64} = \frac{2\times38}{2\times32} = \frac{38}{32} = \frac{2\times19}{2\times16} = \frac{19}{16}$
La fraction $\frac{19}{16}$ est irréductible.

Méthode - Simplifier une fraction en une fraction irréductible
Pour simplifier une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres assez grands, il peut être utile de décomposer ces deux nombres en produit de facteurs premiers.
On a par exemple : $990 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11$ et $1260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$

$$\frac{990}{1260} = \frac{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{11}{2 \times 7} = \frac{11}{14}$$

3.2 Recherche des diviseurs d'un nombre

La décomposition en facteurs premiers d'un nombre entier permet d'obtenir la liste de ses diviseurs :

Méthode - Déterminer les diviseurs d'un nombre entier
Pour faire la liste des diviseurs d'un nombre entier on utilise sa décomposition en produit de facteurs premiers. Il faut ensuite effectuer toutes les combinaisons de produits possibles.

Exemple
On a par exemple $630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$
On obtient les diviseurs de 630 en effectuant les combinaisons de produits de ses facteurs premiers.
Voici ses diviseurs :
Aucun facteur premier : 1
Un facteur premier : 2, 3, 5, 7 ;
Deux facteurs premiers : $2 \times 3 = 6, 2 \times 5 = 10, 2 \times 7 = 14, 3 \times 3 = 9, 3 \times 5 = 15, 3 \times 7 = 21, 5 \times 7 = 35$
Trois facteurs premiers :
$2 \times 3 \times 3 = 18, 2 \times 3 \times 5 = 30, 2 \times 3 \times 7 = 42, 3 \times 3 \times 5 = 45, 3 \times 3 \times 7 = 63, 3 \times 5 \times 7 = 105$
Quatre facteurs premiers : $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90, 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 126, 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 315$
Cinq facteurs premiers : $2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 630$
On vient de trouver 21 diviseurs : $1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 15, 18, 21, 30, 35, 42, 45, 63, 90, 105, 126, 315, 630$

Méthode - Déterminer les diviseurs communs à deux nombres entier
En utilisant les décompositions en produits de facteurs premiers, il faut trouver les facteurs communs et faire ensuite toutes les combinaisons de produits possibles.

Exemple
On a par exemple : $990 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 11$ et $1260 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$
Les facteurs premiers communs sont : $2, 3, 3$ et 5
Les combinaisons possibles sont :
$2, 3, 5, 2 \times 3 = 6, 3 \times 3 = 9, 2 \times 5 = 10, 3 \times 5 = 15, 2 \times 3 \times 3 = 18, 2 \times 3 \times 5 = 30, 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$
Il y a donc 11 diviseurs communs : $1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 90$.
90 est le plus grand diviseur commun à ces deux nombres.

Méthode - Déterminer le plus grand diviseur commun à deux nombres entier
En utilisant les décompositions en produits de facteurs premiers, il faut trouver les facteurs communs et déterminer le plus grand diviseur.

Exemple
On a par exemple : $1080 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ et $1440 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$
Le plus grand diviseur commun à ces deux nombres s'obtient en observant les facteurs premiers de ces décompositions.
Il faut repérer chaque nombre premier et se demander combien de fois il apparaît en commun dans chacun des nombres.
Dans notre cas, le nombre 2 apparaît trois fois dans 1080 et quatre fois dans 1440. Il doit être présent trois fois dans le plus grand diviseur commun.
Le nombre 3 apparaît trois fois dans 1080 et deux fois dans 1440. Il doit être présent deux fois dans le plus grand diviseur commun.
Le nombre 35 apparaît un fois dans chacun des nombres.
Ainsi le plus grand diviseur commun est $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 360$
On peut ensuite remarquer que $\frac{1080}{1440} = \frac{360 \times 3}{360 \times 4} = \frac{3}{4}$ qui est irréductible !

4 Activités

4.1 Cryptographie - Chiffre affine

Multiplier une lettre par un nombre

Nous allons créer une nouvelle opération mathématique, la multiplication entre les lettres de l'alphabet et les nombres entiers. Pour ne pas confondre cette opération étrange avec la multiplication habituelle, nous allons utiliser un nouveau symbole $\otimes$. Avant deffectuer cette opération il est nécessaire de numéroter les 26 lettres de lalphabet de la manière suivante :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Pour multiplier une lettre par un nombre entier on applique lalgorithme suivant :

— effectuer le produit du numéro de la lettre et du nombre entier ;

— calculer le reste de la division de ce produit par 26 ;

— le résultat est la lettre qui correspond au numéro obtenu.

Effectuer les multiplications suivantes :

$C \otimes 1 =$ $\quad A \otimes 2 =$ $\quad D \otimes 9 =$ $\quad M \otimes 13 =$ $\quad T \otimes 26 =$

$M \otimes 0 =$ $\quad F \otimes 4 =$ $\quad F \otimes 30 =$ $\quad F \otimes 56 =$ $\quad F \otimes 82 =$

Le chiffre linéaire

Cette méthode de chiffrement consiste à multiplier les lettres du texte original par un nombre entier secret : la clé de cryptage.
En observant les multiplications précédentes, indiquer le nombre de clés de cryptage possibles.
Compléter le tableau suivant avec pour clé de cryptage le nombre 3 :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Reste																										
Code																										

Compléter le tableau suivant avec pour clé de cryptage le nombre 4 :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Reste																										
Code																										

Que remarquez-vous ?
Voici les tableaux de cryptage pour plusieurs clés différentes :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
$\otimes 3$																										
$\otimes 4$																										
$\otimes 5$	0	5	10	15	20	25	4	9	14	19	24	3	8	13	18	23	2	7	12	17	22	1	6	11	16	21
$\otimes 9$	0	9	18	1	10	19	2	11	20	3	12	21	4	13	22	5	14	23	6	15	24	7	16	25	8	17
$\otimes 13$	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13	0	13
$\otimes 21$	0	21	16	11	6	1	22	17	12	7	2	23	18	13	8	3	24	19	14	9	4	25	20	15	10	5
$\otimes 24$	0	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0	24	22	20	18	16	14	12	10	8	6	4	2

Que remarquez-vous en observant les clés de cryptage 4, 13 et 24 ?
Que remarquez-vous en observant les clés de cryptage 4, 13 et 24 ?

4.2 Le jeu de Juniper-Green

Le jeu de Juniper-Green a été inventé par Richard Porteus en 1996 pour aider des enfants de l'école primaire à manipuler les tables de multiplication. Ce jeu porte le nom de l'école. Il a été popularisé par le mathématicien Ian Stewart dans un article du magazine Pour la Science au mois de juillet 1997.

Diviseurs et multiples d'un nombre entier

- **Multiple :** un multiple b d'un nombre entier a est un nombre entier appartenant à la table de multiplication de a.
- **Diviseur :** un diviseur b d'un nombre entier a est un nombre entier pour lequel a est un multiple de b.

1. Faire la liste de tous les diviseurs de 48 puis de 60.
   - 18 :
   - 48 :
   - 60 :
2. Faire la liste des multiples de 13 compris entre 256 et 312.
   Les multiples sont :
3. Juniper-Green en mode ' bataille '
   Règle du jeu :
   - Le joueur qui commence la partie choisit un nombre entier compris entre 1 et 100 ;
   - Le second joueur doit choisir un nombre entier compris entre 1 et 100 vérifiant les deux conditions suivantes :
     - Ce nombre n'a pas encore été choisi dans cette partie ;
     - Ce nombre est un **multiple** ou un **diviseur** du nombre précédent.
   - Si un joueur ne peut plus choisir de nombre entier, il a perdu la partie.

   Faire quelques parties avec votre voisin en notant à chaque fois en ligne les nombres entiers successifs choisis. Quelle est la stratégie gagnante à ce jeu ?
4. On ajoute une règle supplémentaire :

   ' Le premier nombre choisi doit obligatoirement être un nombre pair. '

   Refaire quelques parties avec votre voisin en utilisant cette règle.
5. Juniper-Green en mode ' collaboratif '
   Vous n'êtes plus obligé de commencer par un nombre pair. Dans ce mode, votre objectif, à deux, est d'obtenir la partie de Juniper-Green la plus longue possible.
   (a) Déterminer la plus longue partie de Juniper-Green en vous limitant à des nombres compris entre 1 et 40.
   (b) Déterminer la plus longue partie de Juniper-Green en élargissant votre recherche à des nombres compris entre 1 et 100.
   (c) Serez-vous assez persévérant pour déterminer la suite la plus longue avec des nombres compris entre 1 et 200 ?

Fin de chapitre