EXERCICE 1 **4 points**

Démontrer par récurrence l'inégalité de Bernouilli : " $a > 0, \forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1 + na$ ".

Corrigé :
Soit $\mathscr{P}_{n\in\mathbb{N}}$:"$a > 0, \forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1 + na$".

Initialisation
Pour $n = 0$, on a : $(1+a)^0 = 1 \quad \text{et} \quad 1 + 0 \times a = 1$ Donc $(1+a)^0 \geq 1 + 0 \times a$. L'inégalité est vraie au rang 0.

Hypothèse de récurrence
Supposons que pour un rang $k \in \mathbb{N}$ fixé, on ait : $(1+a)^n \geq 1 + na \quad$ (hypothèse de récurrence)
Hérédité
Montrons qu'au rang $k+1$, on a : $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$
On a :

$$\begin{aligned}
(1+a)^k &\geq 1 + ka \\
(1+a)^k \times (1+a) &\geq (1+ka)(1+a) \quad (\text{car } 1 + a > 0) \\
(1+a)^{k+1} &\geq 1 + a + ka + ka^2 \geq 1 + a + ka \quad (\text{car } ka^2 \geq 0) \\
(1+a)^{k+1} &\geq 1 + a + ka = 1 + a(k+1) \\
(1+a)^{k+1} &\geq 1 + (k+1)a
\end{aligned}$$

Alors $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie et $\mathscr{P}_k$ est héréditaire.
Conclusion : Par le raisonnement par récurrence, l'inégalité de Bernouilli est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 2 **3 points**

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 6$

Corrigé
Soit $\mathscr{P}_{n\in\mathbb{N}}$:"$u_n \leq 6$".
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = -2 \leq 6$. La propriété est vraie au rang 0.

Hypothèse de récurrence
Supposons que pour un rang $k \in \mathbb{N}$ fixé, on ait : $u_k \leq 6$
Hérédité
Montrons qu'au rang $k+1$, on a $u_{k+1} \leq 6$.
On a :

$$\begin{aligned}
u_k &\leq 6 \\
\frac{1}{2}u_k &\leq 3 \\
\frac{1}{2}u_k + 3 &\leq 6 \\
u_{k+1} &\leq 6
\end{aligned}$$

Alors $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie et $\mathscr{P}_k$ est héréditaire.

Conclusion : Par le raisonnement par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 6$.

EXERCICE 3 **3 points**

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

Démontrer par récurrence que $u_n = 3 - 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé :
Soit $\mathscr{P}_{n\in\mathbb{N}}$:"$u_n = 3 - 2^n$".
Initialisation : Pour $n = 0$, on a :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad 3 - 2^0 = 3 - 1 = 2$$

Donc $u_0 = 3 - 2^0$. La propriété est vraie au rang 0.

Hypothèse de récurrence
Supposons que pour un rang $k \in \mathbb{N}$ fixé, on ait : $u_k = 3 - 2^k$

Hérédité :
Montrons qu'au rang $k + 1$, on a $u_{k+1} = 3 - 2^{k+1}$.
On a :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k - 3 \\ &= 2(3 - 2^k) - 3 \quad \text{(d'après l'hypothèse de récurrence)} \\ &= 6 - 2^{k+1} - 3 \\ &= 3 - 2^{k+1} \end{aligned}$$

Alors $\mathscr{P}_{k+1}$ est vraie et $\mathscr{P}_k$ est héréditaire.

Conclusion : Par le raisonnement par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 - 2^n$.