NOM :	**Prénom :**	**Classe :**
Appréciation :		**Note :**

EXERCICE 1 **3 points**

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{u_n + 1} \end{cases}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{3}{4} \leq u_n \leq 3$.

Corrigé :

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 3$. On a bien $\dfrac{3}{4} \leq 3 \leq 3$.

Hérédité : Supposons que pour un entier n fixé, on ait $\dfrac{3}{4} \leq u_n \leq 3$.

Montrons que $\dfrac{3}{4} \leq u_{n+1} \leq 3$.

On a $u_{n+1} = \dfrac{3}{u_n + 1}$.

Comme $\dfrac{3}{4} \leq u_n \leq 3$, alors :

$$u_n + 1 \geq \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4} \quad \text{et} \quad u_n + 1 \leq 3 + 1 = 4$$

Donc :

$$\frac{1}{u_n + 1} \leq \frac{4}{7} \quad \text{et} \quad \frac{1}{u_n + 1} \geq \frac{1}{4}$$

Ainsi :

$$u_{n+1} = \frac{3}{u_n + 1} \leq \frac{3 \times 4}{7} = \frac{12}{7} \approx 1,71 \leq 3$$

$$u_{n+1} = \frac{3}{u_n + 1} \geq \frac{3}{4} = 0,75$$

On a bien $\dfrac{3}{4} \leq u_{n+1} \leq 3$.

Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{3}{4} \leq u_n \leq 3$.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit la somme S_n définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$S_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + n(n+1)$$

1. Calculer les termes S_1, S_2 et S_3.

Corrigé :

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \times 2 = 2 \\ S_2 &= 1 \times 2 + 2 \times 3 = 2 + 6 = 8 \\ S_3 &= 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 = 2 + 6 + 12 = 20 \end{aligned}$$

2. Déterminer une relation entre S_{n+1} et S_n.

Corrigé :

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)(n+2)$$

3. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Corrigé :

Initialisation : Pour $n = 1$: $S_1 = 2$ et $\dfrac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2$. C'est vrai.

Hérédité : Supposons que pour un entier n fixé, $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Montrons que $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$.

On a :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= (n+1)(n+2)\left(\frac{n}{3} + 1\right) \\ &= (n+1)(n+2)\left(\frac{n+3}{3}\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \end{aligned}$$

Conclusion : Par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 3 **4 points**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Comparer 2^n et n^2 pour différentes valeurs de n.

   Corrigé :

$$\begin{aligned}
&n=0 : 2^0=1,\ 0^2=0 && \Rightarrow 2^0>0^2\\
&n=1 : 2^1=2,\ 1^2=1 && \Rightarrow 2^1>1^2\\
&n=2 : 2^2=4,\ 2^2=4 && \Rightarrow 2^2=2^2\\
&n=3 : 2^3=8,\ 3^2=9 && \Rightarrow 2^3<3^2\\
&n=4 : 2^4=16,\ 4^2=16 && \Rightarrow 2^4=4^2\\
&n=5 : 2^5=32,\ 5^2=25 && \Rightarrow 2^5>5^2\\
&n=6 : 2^6=64,\ 6^2=36 && \Rightarrow 2^6>6^2
\end{aligned}$$

2. Démontrer que, pour tout $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

   Corrigé : Par récurrence.

   Initialisation : Pour $n = 4$: $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$, donc $2^4 \geq 4^2$.

   Hérédité : Supposons que pour un entier $n \geq 4$, on ait $2^n \geq n^2$.

   Montrons que $2^{n+1} \geq (n+1)^2$.

   On a :

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2$$
$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

   Montrons que $2n^2 \geq n^2 + 2n + 1$ pour $n \geq 4$:

$$2n^2 - n^2 - 2n - 1 = n^2 - 2n - 1 \geq 0 \quad \text{pour } n \geq 3$$

   Donc $2^{n+1} \geq 2n^2 \geq (n+1)^2$.

   Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

3. Cette inégalité est-elle vraie pour $n < 4$?

   Corrigé : D'après le tableau de la question 1, l'inégalité $2^n \geq n^2$ n'est pas vraie pour $n = 3$ $(8 < 9)$.

EXERCICE 4 **2,5 points**

Un clavier de 12 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre parmi A, B et C, et 3 chiffres distincts ou non parmi les chiffres de 1 à 9.

1. Combien de codes différents peut-on former ?
   Corrigé : $3 \times 9 \times 9 \times 9 = 3 \times 729 = 2187$ codes
2. Combien de codes y a-t-il sans le chiffre 1 ?
   Corrigé : $3 \times 8 \times 8 \times 8 = 3 \times 512 = 1536$ codes
3. Combien de codes y a-t-il comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
   Corrigé : $2187 - 1536 = 651$ codes
4. Combien de codes y a-t-il comportant des chiffres distincts ?
   Corrigé : $3 \times 9 \times 8 \times 7 = 3 \times 504 = 1512$ codes
5. Combien de codes y a-t-il comportant au moins deux chiffres identiques ?
   Corrigé : $2187 - 1512 = 675$ codes

EXERCICE 5 **2,5 points**

Pour chacune des questions, veuillez sélectionner la ou les bonnes réponses en justifiant votre choix.

Partie A
Un sac contient 4 jetons jaunes, numérotés de 1 à 4, 2 jetons rouges numérotés 1 et 2 et 3 jetons bleus numérotés de 1 à 3.
L'expérience consiste à tirer au hasard et simultanément 3 jetons du sac.

1. Le nombre de possibilités de tirer 3 jetons de la même couleur est :

   a. 2　　　b. 3　　　c. 5　　　d. 30

   Corrigé : c. 5
   Jaunes : $\binom{4}{3} = 4$
   Rouges : $\binom{2}{3} = 0$ (impossible)
   Bleus : $\binom{3}{3} = 1$
   Total : $4 + 1 = 5$
2. Le nombre de possibilités de tirer 3 jetons de couleurs différentes est :

   a. $\frac{4!}{2! \times 3!}$　　　b. $\binom{4}{2} + \binom{4}{3}$　　　c. 9　　　d. 24

   Corrigé : d. 24
   On choisit 1 jeton de chaque couleur :
   Jaune : $\binom{4}{1} = 4$
   Rouge : $\binom{2}{1} = 2$
   Bleu : $\binom{3}{1} = 3$
   Total : $4 \times 2 \times 3 = 24$

Partie B

On dispose d'un jeu de 32 cartes, composé entre autres de 8 cartes *pique* et de 4 as, dont l'as de pique.

1. On tire au hasard deux cartes successivement et sans remise.
   Le nombre de tirages différents est :

   a. 63 b. 496 c. 992 d. 1024

   Corrigé : c. 992
   $32 \times 31 = 992$

2. On tire au hasard et simultanément deux cartes de ce jeu.
   Le nombre de tirages sans *as* ni *pique* est :

   a. 190 b. 210 c. 420 d. 441

   Corrigé : b. 210
   Cartes qui ne sont ni as ni pique : $32 - 8 - 4 + 1 = 21$ (on retire l'as de pique compté deux fois)
   $\binom{21}{2} = 210$

Partie C

On considère tous les entiers naturels de 5 chiffres que l'on peut écrire au moyen de 5 jetons numérotés de 1 à 5. Le nombre de nombres que l'on peut former est :

1. a. 5! b. 5^5 c. $\binom{5}{5}$ d. 120

   Corrigé : a. 5! et d. 120
   C'est le nombre de permutations de 5 éléments : $5! = 120$

Exercice 6 — 3 points

Soit $E = \{a; b; c; d; e; f; g\}$

1. Donner deux exemples de 3-uplets.
   Corrigé : (a, b, c) et (d, e, f)
2. Déterminer le nombre d'arrangements de 3 éléments de E.
   Corrigé : $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$
3. Donner 2 permutations possibles de E.
   Corrigé : (a, b, c, d, e, f, g) et (g, f, e, d, c, b, a)
4. Déterminer le nombre de permutations de E.
   Corrigé : $7! = 5040$
5. Donner deux parties à 4 éléments de E.
   Corrigé : $\{a, b, c, d\}$ et $\{d, e, f, g\}$
6. Donner le nombre de parties de 4 éléments de E.
   Corrigé : $\binom{7}{4} = 35$

Exercice 7 — 3 points

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3x - 7$ sur $\mathbb{R}$
$$f'(x) = 6x^2 + 10x + 3$$
2. $f(x) = 3x - \frac{5}{x}$ sur $]0; +\infty[$
$$f'(x) = 3 + \frac{5}{x^2}$$
3. $f(x) = (7x^2 - 5x + 2)(1 - 9x^3)$ sur $\mathbb{R}$
$$f'(x) = (14x - 5)(1 - 9x^3) + (7x^2 - 5x + 2)(-27x^2)$$
4. $f(x) = (3x^2 + 5x - 1)^5$ sur $\mathbb{R}$
$$f'(x) = 5(3x^2 + 5x - 1)^4 \times (6x + 5)$$
5. $f(x) = (x + 1)\sqrt{x}$
$$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + (x + 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x + 1}{2\sqrt{x}}$$
6. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 7}{x - 1}$
$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(x - 1) - (x^2 - 2x + 7)(1)}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 4x + 2 - x^2 + 2x - 7}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 5}{(x - 1)^2}$$