Chapitre 2. Les nombres complexes d'un point de vue algébrique. Exercices.

Boulanger Yann

3 septembre 2025

Table des matières

1 Complexes : Propriétés

1.1 Exercice 1

Dans chaque cas, donner la partie réelle et la partie imaginaire de z :

$z = 6 + 3i$	$\mathrm{Re}(z) =$	$\mathrm{Im}(z) =$
$z = 5i + 2$	$\mathrm{Re}(z) =$	$\mathrm{Im}(z) =$
$z = 5 - i$	$\mathrm{Re}(z) =$	$\mathrm{Im}(z) =$
$z = -7$	$\mathrm{Re}(z) =$	$\mathrm{Im}(z) =$
$z = -2i$	$\mathrm{Re}(z) =$	$\mathrm{Im}(z) =$
$z = i$	$\mathrm{Re}(z) =$	$\mathrm{Im}(z) =$

1.2 Exercice 2

Donner la forme algébrique des nombres suivants :

$$z_1 = (1 - 4i) + (-3 + 2i) \quad z_2 = (-7 - i) + (4 + 3i) \quad z_3 = 9i - 5 - (3 - i)$$

1.3 Exercice 3

Donner la forme algébrique des nombres suivants :

$$z_1 = (1 - 4i) \times (-3 + 2i) \quad z_2 = (-7 - i) \times (4 + 3i) \quad z_3 = (9i - 5) \times (3 - i)$$

$$z_4 = (2 + 3i)^2 \quad z_5 = (-7 - i)^2 \quad z_6 = (2i)^3$$

1.4 Exercice 4

On considère les nombres $z = 3 - 2i$ et $z' = -1 + 3i$.
Donner la forme algébrique des nombres suivants :

1. $2z - 3z' =$
2. $-2z + iz' =$
3. $z^2 =$
4. $z^3 =$
5. $zz' =$
6. $z(i - z') =$

1.5 Exercice 5

Dans chaque cas, donner le conjugué de z :

z	$6 + 3i$	$5i + 2$	$5 - i$	-7	$-2i$	i
$\bar{z}$						

1.6 Exercice 6

Calculer $z\bar{z}$ dans chaque cas :

1. $z = 3 - 4i$;
2. $z = 5 + i$;
3. $z = -5 + 2i$.

1.7 Exercice 7

Donner la forme algébrique des nombres suivants :

$z_1 = \frac{1}{1+4i}$	$z_2 = \frac{1}{6-i}$	$z_3 = \frac{1}{i-3}$

1.8 Exercice 8

Donner la forme algébrique des nombres suivants :

$z_1 = \frac{3+4i}{1+2i}$	$z_2 = \frac{1+i}{1-i}$	$z_3 = \frac{4}{3i}$
$z_4 = \frac{-3}{1+i\sqrt{2}}$	$z_5 = \frac{5+2i}{3i}$	$z_6 = i + \frac{1}{i}$

1.9 Exercice 9

Effectuer les calculs suivants :

$$z_1 = (1+i\sqrt{2})(-3-5i) \quad z_2 = (1+i\omega)(RC-2i) \quad z_3 = \frac{1}{1+i}$$

$$z_4 = \frac{1}{2-3i} \quad z_5 = \frac{2}{i} \quad z_6 = \frac{2+i}{-3+i} \quad z_7 = \frac{R+i\omega}{C\omega - i}$$

2 Complexes : Équations

2.1 Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 - 4z + 13 = 0$
   $\Delta =$
   $z_1 =$
   $z_2 =$
2. $2z^2 - 8z + 10 = 0$
   $\Delta =$
   $z_1 =$
   $z_2 =$
3. $3z^2 + 6z + 6 = 0$
   $\Delta =$
   $z_1 =$
   $z_2 =$

2.2 Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + 2z + 4 = 0$
   $\Delta =$
   $z_1 =$
   $z_2 =$
2. $z^2 + 4z + 9 = 0$
   $\Delta =$
   $z_1 =$
   $z_2 =$
3. $2z^2 - 4z + 6 = 0$
   $\Delta =$
   $z_1 =$
   $z_2 =$

2.3 Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(z-1)(z^2 - z + 1) = 0 \quad (z-3)(z^2 + 6z + 25) = 0 \quad (z+4)(z^2 - 4z + 16) = 0$$

2.4 Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$E_1 : x^2 + 2x + 3 = 0 \quad E_2 : 9x^2 + 6x + 1 = 0 \quad E_3 : -7x^2 - 5x + 2 = 0 \quad E_4 : x^2 + 4x + 4 = 0$$

2.5 Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

2.6 Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$I_1 : x^2 + 2x + 3 > 0 \quad I_2 : 9x^2 + 6x + 1 \leq 0 \quad I_3 : -7x^2 - 5x + 2 < 0 \quad I_4 : x^2 + 4x + 4 \geq 0$$

2.7 Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $\frac{z-3}{z-2} = z$

b) $2z + iz = 4$

c) $(2+i)z + 4 - i = 0$

d) $\frac{z+i}{z-i} = 5$

2.8 Exercice 8

Dans $\mathbb{C}$, on considère l'équation (EA) dépendant du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$: $x^2 - 3x + 4 = \lambda$.
Pour quelles valeurs de λ, l'équation (EA) admet deux solutions distinctes conjuguées ?

2.9 Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i \\ z - z' = -2 + i \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2z - z' = 5 \\ iz + 3z' = 7i \end{cases}$$

2.10 Exercice 10

P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^4 + 3z^3 + 6z^2 + 6z + 8$.

a) Justifier la copie d'écran ci-dessous obtenue avec le logiciel Xcas.

Fich	Edit	Cfg	Aide	Outils	Expression	Cmds	Prg	Graphe	Geo
Sans_nom									
Sauver	Config	exact real	RAD 12	xcas					Kbd

factorise$(z^4 + 3z^3 + 6z^2 + 6z + 8)$

$$(z^2 + 2)(z^2 + 3z + 4)$$

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$

2.11 Exercice 11

P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 17z + 6$.

a) Calculer $P(i)$.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$

2.12 Exercice 12

Soit ω_0 et m deux nombres strictement positifs.
Résoudre l'équation $r^2 + 2mr + \omega_0^2 = 0$

2.13 Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - z\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$ dans les cas suivants :

a) $\alpha = 0$

b) $\alpha = \frac{\pi}{3}$

c) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

2.14 Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 = 2i$

b) $z^2 = -15 + 8i$

c) $z^2 - (5+3i)z + 7i + 4 = 0$

d) $z^2 + 6iz - 13 = 0$

Fin de chapitre