EXERCICE 1 **4 points**

Déterminer les entiers relatifs n tels que $(n-4)$ divise $(3n-17)$.

Corrigé :
On cherche les entiers relatifs n tels que $(n-4) \mid (3n-17)$.
Effectuons la division euclidienne de $3n-17$ par $n-4$:

$$3n-17 = 3(n-4)-5$$

Ainsi, $(n-4)$ divise $(3n-17)$ si et seulement si $(n-4)$ divise -5.
Les diviseurs de -5 dans $\mathbb{Z}$ sont : -5, -1, 1, 5.
On résout donc :

- $n-4=-5 \Rightarrow n=-1$
- $n-4=-1 \Rightarrow n=3$
- $n-4=1 \Rightarrow n=5$
- $n-4=5 \Rightarrow n=9$

Réponse : Les entiers recherchés sont -1, 3, 5 et 9.

EXERCICE 2 **6 points**

Les questions ci-dessous sont indépendantes.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, 9^n-4^n est divisible par 5.
Corrigé :
Initialisation : Pour $n=0$: $9^0-4^0=1-1=0$, qui est divisible par 5.
Hérédité : Supposons que pour un entier n fixé, $5 \mid (9^n-4^n)$. Montrons que $5 \mid (9^{n+1}-4^{n+1})$.
On a :

$$\begin{aligned} 9^{n+1}-4^{n+1} &= 9\cdot 9^n - 4\cdot 4^n \\ &= 9\cdot 9^n - 9\cdot 4^n + 9\cdot 4^n - 4\cdot 4^n \\ &= 9(9^n-4^n)+5\cdot 4^n \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, $5 \mid (9^n-4^n)$, et évidemment $5 \mid 5\cdot 4^n$. Donc 5 divise la somme.
Conclusion : Par le principe de récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $5 \mid (9^n-4^n)$.

2. Démontrer en utilisant des congruences que pour tout entier naturel n, $8^n+6^{2n}-2$ est divisible par 7.
Corrigé :
On travaille modulo 7 :

$$\begin{aligned} 8 \equiv 1[7] \Rightarrow 8^n \equiv 1^n = 1[7] \\ 6 \equiv -1[7] \Rightarrow 6^{2n} \equiv (-1)^{2n} = 1[7] \end{aligned}$$

Donc :

$$8^n+6^{2n}-2 \equiv 1+1-2 = 0[7]$$

Ainsi, $7 \mid (8^n+6^{2n}-2)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

EXERCICE 3 **4 points**

1. Prouver que $6789^{333} \equiv -1[5]$.
   Corrigé :
   On travaille modulo 5 :
   $$6789 \equiv 6789 - 5 \times 1357 = 6789 - 6785 = 4 \equiv -1[5]$$
   Donc :
   $$6789^{333} \equiv (-1)^{333} = -1[5]$$
2. Démontrer que : $6789^{333} + 3456^{79797}$ est divisible par 5.
   Corrigé :
   D'après la question précédente : $6789^{333} \equiv -1[5]$
   Étudions 3456 modulo 5 :
   $$3456 \equiv 3455 + 1 \equiv 1[5] \Rightarrow 3456^{79797} \equiv 1^{79797} = 1[5]$$
   Donc :
   $$6789^{333} + 3456^{79797} \equiv -1 + 1 = 0[5]$$
   Ainsi, la somme est divisible par 5.

EXERCICE 4 **3 points**

Déterminer le chiffre des unités du nombre 3^{2025}.

Corrigé :
On étudie les puissances de 3 modulo 10 :

$$\begin{aligned}
3^1 &= 3 \equiv 3[10]\\
3^2 &= 9 \equiv 9[10]\\
3^3 &= 27 \equiv 7[10]\\
3^4 &= 81 \equiv 1[10]\\
3^5 &= 243 \equiv 3[10]
\end{aligned}$$

On observe une périodicité de période 4.
Comme $2025 = 4 \times 506 + 1$, on a :

$$3^{2025} = 3^{4\times 506+1} = (3^4)^{506} \times 3^1 \equiv 1^{506} \times 3 = 3[10]$$

Réponse : Le chiffre des unités de 3^{2025} est 3.

EXERCICE 5 **3 points**

Les questions ci-dessous sont indépendantes.

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $8x \equiv 1[12]$.
   Corrigé :
   On cherche les solutions de $8x \equiv 1[12]$.
   Or $\gcd(8, 12) = 4$ et $4 \nmid 1$, donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $8x \equiv 1[15]$.
   Corrigé :
   On cherche les solutions de $8x \equiv 1[15]$.
   Comme $\gcd(8, 15) = 1$, il existe une unique solution modulo 15.
   On cherche l'inverse de 8 modulo 15 :

$$\begin{aligned} 15 &= 8 \times 1 + 7 \\ 8 &= 7 \times 1 + 1 \\ 7 &= 1 \times 7 + 0 \end{aligned}$$

   Remontons l'algorithme d'Euclide :

$$1 = 8 - 7 \times 1 = 8 - (15 - 8 \times 1) \times 1 = 8 \times 2 - 15 \times 1$$

   Donc $8 \times 2 \equiv 1[15]$, l'inverse de 8 modulo 15 est 2.
   La solution est $x \equiv 2[15]$.
   Dans $\mathbb{N}$, les solutions sont : $x = 2 + 15k$ avec $k \in \mathbb{N}$.