La Rentrée en première Spécialités Mathématiques. Exercices. Corrigés.

Boulanger Yann

5 septembre 2025

Table des matières

1 Calcul numérique

1.1 Exercice 1 : Fractions, puissances

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{2}{5} + \frac{8}{5} \times \frac{17}{12} = \frac{2}{5} + \frac{136}{60} = \frac{24}{60} + \frac{136}{60} = \frac{160}{60} = \frac{8}{3} \\
B &= \frac{5}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \\
C &= \frac{4}{3} \\
D &= \frac{1+\frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\
E &= \frac{51}{-26} \times \frac{-49}{15} \times \frac{65}{119} = \frac{51 \times 49 \times 65}{26 \times 15 \times 119} = \frac{3 \times 17 \times 7 \times 7 \times 5 \times 13}{2 \times 13 \times 3 \times 5 \times 7 \times 17} = \frac{7}{2} \\
F &= \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{5}{8} - \frac{8}{3} = \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{6}\right)^2 + \frac{15}{24} - \frac{64}{24} \\
&= \left(-\frac{3}{6}\right)^2 - \frac{49}{24} = \frac{9}{36} - \frac{49}{24} = \frac{6}{24} - \frac{49}{24} = -\frac{43}{24} \\
G &= -2^3 = -8 \\
H &= 2^{-3} = \frac{1}{8} \\
I &= \frac{21 \times 10^{-13}}{3 \times 10^{-14}} = 7 \times 10^1 = 70 \\
J &= \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^{-1} = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = \frac{12}{4} = 3 \\
K &= \frac{(-5)^4 \times 7^2 \times (-2)^{-3}}{(-4)^4 \times (-1)^5 \times 25} = \frac{625 \times 49 \times (-\frac{1}{8})}{256 \times (-1) \times 25} = \frac{-30625/8}{-6400} = \frac{30625}{51200} = \frac{1225}{2048} \\
L &= \left(\frac{4^{-2} \times 8^4}{90^7 \times 30^{-2}}\right)^3 = \left(\frac{(2^2)^{-2} \times (2^3)^4}{(9 \times 10)^7 \times (3 \times 10)^{-2}}\right)^3 = \left(\frac{2^{-4} \times 2^{12}}{9^7 \times 10^7 \times 3^{-2} \times 10^{-2}}\right)^3 \\
&= \left(\frac{2^8 \times 3^2}{3^{14} \times 10^5}\right)^3 = \left(\frac{256 \times 9}{4782969 \times 100000}\right)^3 = \left(\frac{2304}{478296900000}\right)^3
\end{aligned}
$$

1.2 Exercice 2 : Racines, valeurs absolues

1. Calculs :

$$
\begin{aligned}
A &= \sqrt{10^{-20}} = 10^{-10} \\
B &= \sqrt{50} + \sqrt{18} + \sqrt{8} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \\
C &= \sqrt{50} \times \sqrt{18} \times \sqrt{8} = \sqrt{7200} = \sqrt{144 \times 50} = 12\sqrt{50} = 60\sqrt{2} \\
D &= (3\sqrt{2} - 2)(2 + \sqrt{2}) = 6\sqrt{2} + 6 - 4 - 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} + 2 \\
E &= \sqrt{25 + 2^2 \times 5} - \sqrt{10^2 + 25} = \sqrt{25 + 20} - \sqrt{100 + 25} = \sqrt{45} - \sqrt{125} = 3\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = -2\sqrt{5} \\
F &= |17 - 25| = 8 \\
G &= |12 - 7\sqrt{3}| = 7\sqrt{3} - 12 \quad (\text{car } 7\sqrt{3} \approx 12,12 > 12) \\
H &= |-3 + \pi| = \pi - 3 \quad (\text{car } \pi \approx 3,14 > 3)
\end{aligned}
$$

2. Suppression des radicaux :

$$A = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{2}-1} \times \frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}+1} = \frac{5\sqrt{3}(2\sqrt{2}+1)}{8-1} = \frac{10\sqrt{6}+5\sqrt{3}}{7}$$
$$B = \frac{3+4\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} \times \frac{3-2\sqrt{3}}{3-2\sqrt{3}} = \frac{9-6\sqrt{3}+12\sqrt{3}-24}{9-12} = \frac{-15+6\sqrt{3}}{-3} = 5-2\sqrt{3}$$
$$C = \frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}-1} + \frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+1} = \frac{(2\sqrt{3}+1)^2+(2\sqrt{3}-1)^2}{12-1}$$
$$= \frac{(12+4\sqrt{3}+1)+(12-4\sqrt{3}+1)}{11} = \frac{26}{11}$$

3. Intervalles et représentations graphiques :
   (a) $|x-3| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x-3 \leq 5 \Rightarrow -2 \leq x \leq 8$
   Intervalle : $[-2; 8]$
   Représentation : segment entre -2 et 8
   (b) $|2-x| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq 2-x \leq 7 \Rightarrow -9 \leq -x \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x \leq 9$
   Intervalle : $[-5; 9]$
   Représentation : segment entre -5 et 9
   (c) $|x-3| \geq 4 \Rightarrow x-3 \leq -4$ ou $x-3 \geq 4 \Rightarrow x \leq -1$ ou $x \geq 7$
   Intervalle : $]-\infty; -1] \cup [7; +\infty[$
   Représentation : deux demi-droites
   (d) $|2-x| \geq 5 \Rightarrow 2-x \leq -5$ ou $2-x \geq 5 \Rightarrow -x \leq -7$ ou $-x \geq 3 \Rightarrow x \geq 7$ ou $x \leq -3$
   Intervalle : $]-\infty; -3] \cup [7; +\infty[$
   Représentation : deux demi-droites

4. Traduction par valeur absolue :
   (a) $x \in [3; 7] \Rightarrow |x-5| \leq 2$
   (b) $x \in [-2; 8] \Rightarrow |x-3| \leq 5$
   (c) $x \in [-\infty; -4] \cup [4; +\infty[\Rightarrow |x| \geq 4$
   (d) $x \in [-\infty; 2] \cup [10; +\infty[\Rightarrow |x-6| \geq 4$
   (e) $x \in [-\infty; -5] \cup [11; +\infty[\Rightarrow |x-3| \geq 8$

2 Calcul littéral

2.1 Exercice 3 : Calcul littéral

1. Simplification :

$$
\begin{aligned}
A &= 8 \times \left(\frac{x+2}{4} - \frac{x-2}{2}\right) = 8 \times \left(\frac{x+2-2(x-2)}{4}\right) = 8 \times \left(\frac{x+2-2x+4}{4}\right) \\
&= 8 \times \left(\frac{-x+6}{4}\right) = 2(-x+6) = -2x+12 \\
B &= \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} = \frac{2x^2-3x+4}{x^3} \\
C &= \frac{2x^2+4x}{x+2} = \frac{2x(x+2)}{x+2} = 2x \quad \text{(pour } x \neq -2\text{)}
\end{aligned}
$$

2. Réduction :

$$
\begin{aligned}
A &= 2(1-x) - (2x-1)(x-3) = 2 - 2x - (2x^2 - 6x - x + 3) \\
&= 2 - 2x - (2x^2 - 7x + 3) = 2 - 2x - 2x^2 + 7x - 3 = -2x^2 + 5x - 1 \\
B &= 3x - 2 - \frac{1-x}{2} = \frac{6x-4-1+x}{2} = \frac{7x-5}{2} \\
C &= 3(x-2)^2 - (2x+3)^2 = 3(x^2-4x+4) - (4x^2+12x+9) \\
&= 3x^2 - 12x + 12 - 4x^2 - 12x - 9 = -x^2 - 24x + 3
\end{aligned}
$$

3. Factorisation :

$$
\begin{aligned}
A &= 8x^3 - 16x^2 + 8x = 8x(x^2-2x+1) = 8x(x-1)^2 \\
B &= (x+5)(2x-3) - (6x-9) = (x+5)(2x-3) - 3(2x-3) = (2x-3)(x+5-3) = (2x-3)(x+2) \\
C &= 16x^2 - 9 = (4x-3)(4x+3) \\
D &= 4x^2 + 12x + 9 = (2x+3)^2 \\
E &= (3x+2)(x-5) + x^2 - 25 = (3x+2)(x-5) + (x-5)(x+5) = (x-5)(3x+2+x+5) = (x-5)(4x+7 \\
F &= (3x-1)^2 + (1-3x)(x+1) = (3x-1)^2 - (3x-1)(x+1) = (3x-1)[(3x-1)-(x+1)] \\
&= (3x-1)(2x-2) = 2(3x-1)(x-1)
\end{aligned}
$$

4. Démonstrations :
   (a) $1 - x + \frac{x^2}{1+x} = \frac{(1-x)(1+x)+x^2}{1+x} = \frac{1-x^2+x^2}{1+x} = \frac{1}{1+x}$
   (b) $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{(x+1)-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

2.2 Exercice 4 : Équations

$(E_1) : 3x = 0 \Rightarrow x = 0$

$(E_2) : 3x^{-1} = 1 \Rightarrow \dfrac{3}{x} = 1 \Rightarrow x = 3$

$(E_3) : x^2 = 5 \Rightarrow x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$

$(E_4) : \dfrac{x+3}{2} - \dfrac{-5x+12}{6} - 1 = \dfrac{4x-3}{3}$

Multiplier par 6 : $3(x+3) - (-5x+12) - 6 = 2(4x-3)$

$3x + 9 + 5x - 12 - 6 = 8x - 6$

$8x - 9 = 8x - 6 \Rightarrow -9 = -6$ Impossible $\Rightarrow \emptyset$

$(E_5) : 5x(6x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{6}$

$(E_6) : \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{x+1}{18} \Rightarrow 36 = (x+1)^2 \Rightarrow x+1 = 6$ ou $x+1 = -6$

$\Rightarrow x = 5$ ou $x = -7$

$(E_7) : \dfrac{x-4}{x+3} - \dfrac{x-4}{(x+3)(x+4)} = \dfrac{x-3}{x+4}$

$\dfrac{(x-4)(x+4) - (x-4)}{(x+3)(x+4)} = \dfrac{x-3}{x+4}$

$\dfrac{(x-4)[(x+4)-1]}{(x+3)(x+4)} = \dfrac{x-3}{x+4}$

$\dfrac{(x-4)(x+3)}{(x+3)(x+4)} = \dfrac{x-3}{x+4}$ (pour $x \neq -3$)

$\dfrac{x-4}{x+4} = \dfrac{x-3}{x+4} \Rightarrow x - 4 = x - 3 \Rightarrow -4 = -3$ Impossible $\Rightarrow \emptyset$

2.3 Exercice 5 : Inéquations

$(I_1) : \dfrac{3x+1}{4} - \dfrac{x+7}{12} < \dfrac{3x-1}{3}$

Multiplier par 12 : $3(3x+1) - (x+7) < 4(3x-1)$

$9x + 3 - x - 7 < 12x - 4$

$8x - 4 < 12x - 4 \Rightarrow -4x < 0 \Rightarrow x > 0$

Solution : $]0; +\infty[$

$(I_2) : \dfrac{x+5}{x+3} - \dfrac{3x+2}{x(x+3)} \geq \dfrac{-2}{x}$

Multiplier par $x(x+3)$ (étude de signe nécessaire)

$\dfrac{x(x+5) - (3x+2)}{x(x+3)} \geq \dfrac{-2}{x}$

$\dfrac{x^2 + 5x - 3x - 2}{x(x+3)} \geq \dfrac{-2}{x}$

$\dfrac{x^2 + 2x - 2}{x(x+3)} + \dfrac{2}{x} \geq 0$

$\dfrac{x^2 + 2x - 2 + 2(x+3)}{x(x+3)} \geq 0$

$\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x(x+3)} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{(x+2)^2}{x(x+3)} \geq 0$

Tableau de signes :

Solution : $] - \infty; -3[\cup]0; +\infty[$

$(I_3) : -3x^2(7x - 15)(11 - 5x) \leq 0$

Étude du signe :

$-3x^2 \leq 0$ toujours (sauf $x = 0$ où c'est 0)

$7x - 15 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{15}{7}$

$11 - 5x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{11}{5}$

Tableau de signes :

Solution : $] - \infty; 0] \cup [\dfrac{11}{5}; \dfrac{15}{7}]$

2.4 Exercice 6 : Système

$$\begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 6x - 2y = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 3x - y = \frac{21}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ y = 3x - \frac{21}{2} \end{cases}$$

Substitution :

$$2x + 3(3x - \frac{21}{2}) = -4 \Rightarrow 2x + 9x - \frac{63}{2} = -4 \Rightarrow 11x = \frac{63}{2} - 4 = \frac{55}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$y = 3 \times \frac{5}{2} - \frac{21}{2} = \frac{15 - 21}{2} = -3$$

Solution : $x = \frac{5}{2}, y = -3$

3 Fonctions

3.1 Exercice 7 : Ensembles de définition

1. $f(x) = \frac{-5}{x^2-4}$
   Défini si $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$ et $x \neq -2$
   $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
2. $f(x) = \sqrt{2 - 7x}$
   Défini si $2 - 7x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{2}{7}$
   $D_f =]-\infty; \frac{2}{7}]$

3.2 Exercice 8 : Pourcentages

1. Pourcentage de livres de cuisine : $\frac{180}{3000} \times 100 = 6\%$
2. Nombre de BD : $3000 \times 0,18 = 540$
3. Pourcentage global de remise :
   Après 1ère remise : 90% du prix
   Après 2ème remise : 75% du nouveau prix
   Global : $0,9 \times 0,75 = 0,675 = 67,5\%$
   Remise totale : $100\% - 67,5\% = 32,5\%$

3.3 Exercice 9 : Fonction de référence

1. $f_1(x) = 2x - \frac{1}{2}$: coefficient directeur 2, ordonnée à l'origine -0,5
   $f_2(x) = -\frac{3}{4}x + 2$: coefficient directeur -0,75, ordonnée à l'origine 2
2. Courbes caractéristiques à tracer
3. Sens de variation :
   - Carré : décroissante sur $]-\infty; 0]$, croissante sur $[0; +\infty[$
   - Inverse : décroissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$
   - Racine carrée : croissante sur $[0; +\infty[$
   - Cube : croissante sur $\mathbb{R}$

3.4 Exercice 10 : Équations de droites

1. D_1 : horizontale $y = 4$
2. D_2 : $y = \frac{1}{2}x + 2$
3. D_3 : $y = -x + 2$
4. D_4 : $y = 3x - 3$
5. D_5 : $y = \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$

4 Vecteurs

4.1 Exercice 12 : Constructions

1. $5\vec{MA} + 3\vec{MB} = \vec{0} \Rightarrow 5(\vec{MO} + \vec{OA}) + 3(\vec{MO} + \vec{OB}) = \vec{0}$
   $\Rightarrow 8\vec{MO} + 5\vec{OA} + 3\vec{OB} = \vec{0} \Rightarrow \vec{OM} = \frac{5}{8}\vec{OA} + \frac{3}{8}\vec{OB}$
2. $2\vec{NA} - \vec{NB} + 3\vec{NC} = \vec{0} \Rightarrow 2(\vec{NO} + \vec{OA}) - (\vec{NO} + \vec{OB}) + 3(\vec{NO} + \vec{OC}) = \vec{0}$
   $\Rightarrow 4\vec{NO} + 2\vec{OA} - \vec{OB} + 3\vec{OC} = \vec{0} \Rightarrow \vec{ON} = \frac{1}{2}\vec{OA} - \frac{1}{4}\vec{OB} + \frac{3}{4}\vec{OC}$

4.2 Exercice 13 : Constructions avec paramètre

1. Constructions selon les valeurs de k
2. Observation : $\vec{DE}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires
3. Démonstration :
   $\vec{DE} = \vec{AE} - \vec{AD} = (k\vec{AB} + 2\vec{AC}) - (2\vec{AB} + k\vec{AC}) = (k-2)\vec{AB} + (2-k)\vec{AC} = (2-k)(\vec{AC} - \vec{AB}) = (2-k)\vec{BC}$
4. Détermination de k :
   (a) D et E confondus si $\vec{DE} = \vec{0} \Rightarrow 2 - k = 0 \Rightarrow k = 2$
   (b) $\vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{DE} \Rightarrow \vec{BC} = \frac{1}{2}(2-k)\vec{BC} \Rightarrow 1 = \frac{2-k}{2} \Rightarrow k = 0$

5 Géométrie dans un repère

5.1 Exercice 14 : Géométrie repérée

1. Milieu de [AC] : $\left(\frac{1+4}{2}; \frac{1+2}{2}\right) = (2,5; 1,5)$
2. Nature de ABCD :
   $\vec{AB}(2; -1), \vec{DC}(2; -1)$ donc AB // DC
   $\vec{AD}(1; 2), \vec{BC}(1; 2)$ donc AD // BC
   C'est un parallélogramme

5.2 Exercice 15 : Droites dans un repère

1. $A(-5; 7), B(10; -2)$
   Coefficient directeur : $\frac{-2-7}{10-(-5)} = \frac{-9}{15} = -\frac{3}{5}$
   Équation : $y - 7 = -\frac{3}{5}(x + 5) \Rightarrow y = -\frac{3}{5}x + 4$
2. $C(3; 2), \vec{v}(4; -2)$
   Coefficient directeur : $\frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$
   Équation : $y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
3. Intersection : résoudre $-\frac{3}{5}x + 4 = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
   $\Rightarrow -\frac{6}{10}x + 4 = -\frac{5}{10}x + \frac{35}{10} \Rightarrow -\frac{1}{10}x = -\frac{5}{10} \Rightarrow x = 5$
   $y = -\frac{3}{5} \times 5 + 4 = 1$
   Point d'intersection : $(5; 1)$
4. Droite parallèle à $y = (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3}$
   Même coefficient directeur : $m = \sqrt{3} + 1$
   Passant par $A(\sqrt{3} - 1; -2)$:
   $-2 = (\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1) + b \Rightarrow -2 = (3 - 1) + b \Rightarrow b = -4$
   Équation : $y = (\sqrt{3} + 1)x - 4$
5. Coefficients directeurs et vecteurs directeurs :
   (a) $(d_a) : y = 0$: coefficient 0, vecteur $(1; 0)$
   (b) $(d_s) : y = -\frac{2x}{3}$: coefficient $-\frac{2}{3}$, vecteur $(3; -2)$
   (c) $(d_\theta) : x = 100$: pas de coefficient, vecteur $(0; 1)$

6 Autres

6.1 Exercice 16 : Raisonnement, Logique

1. Négations :
   (a) Négation : $x \geq 3$ ou $x \leq 1 \rightarrow]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$
   (b) Négation : $x < -2$ et $x \geq 3 \rightarrow \emptyset$
2. Négation : « Il existe un réel x de [0 ;1] tel que $f(x) \neq 2$ »
3. Implications :
   (a) $P \Rightarrow Q$ (vraie), contraposée : $a \leq 0 \Rightarrow a \leq 2$
   (b) $P \Rightarrow Q$ (fausse), $Q \Rightarrow P$ (fausse)
   (c) $P \Rightarrow Q$ (vraie), contraposée : $x^2 \leq 9 \Rightarrow x \leq 3$
4. Implications et réciproques :
   (a) Vraie, réciproque : « Si $\frac{1}{x} = 1$, alors $x = 1$ » (vraie)
   (b) Fausse (contre-exemple : $x = -2$), réciproque : « Si $x < 1$, alors $\frac{1}{x} > 1$ » (fausse)

7 Probabilité

7.1 Exercice 15 : Probabilités

1. Événement contraire : « tirer 0 ou 2 boules noires »
2. Arbre pondéré :
   U1 : B(0,3), N(0,7)
   U2 : B(0,4), N(0,6)
3. $P(BN) = 0{,}3 \times 0{,}6 = 0{,}18$
4. $P(\text{même couleur}) = P(BB) + P(NN) = (0{,}3 \times 0{,}4) + (0{,}7 \times 0{,}6) = 0{,}12 + 0{,}42 = 0{,}54$

8 Algorithmique

8.1 Exercice 17 : Conditionnelle

```
def signe(m,p):
    if m == 0:
        if p >= 0:
            print("f(x) est positive sur R")
        else:
            print("f(x) n'est pas positive sur R")
    else:
        if m > 0:
            print("f(x)>0 pour x>", -p/m)
        else:
            print("f(x)>0 pour x<", -p/m)
```

8.2 Exercice 18 : Boucle

```
def prod(L):
    N = 0
    while L < 10000:
        L = L * 1.2
        N = N + 1
    return N
```

Pour $L = 2500$, l'algorithme retourne 7 années.

Fin de chapitre