# Chapitre 1. Fonctions Polynômes de degré 2 - Partie 1/2

Boulanger Yann

3 septembre 2025

## Table des matières

# 1 Fonction polynôme du second degré et parabole

## 1.1 Définitions

**Définition**
Une **fonction polynôme du degré deux** (ou trinôme de second degré) est une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe des constantes $a \neq 0$ et $(\ b\ ;\ c\ ) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

**Vocabulaire**

1. Cette forme s'appelle la **forme développée** de la fonction polynôme du second degré $f$.
2. Les réels $a, b$ et $c$ sont les **coefficients** de la fonction polynôme du second degré $f$.
3. La courbe d'une fonction polynôme du second degré s'appelle une **parabole**.

**Exemples**

— $g(x) = 5x + 3 - x^2$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$, $b = 5$ et $c = 3$ donc $g$ est une fonction polynômiale du second degré.

— $h(x) = x^2 + 5x + \frac{3}{x}$ n'est pas de la forme $ax^2 + bx + c$ donc $h$ n'est pas une fonction polynômiale du second degré.

# 2 Forme factorisée et racines

## 2.1 Racines

**Définition**
Soient $f$ une fonction polynôme du second degré et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On dit que $\lambda$ est une **racine** de $f$ si l'assertion $f(\lambda) = 0$ est vraie.

**Exemple**
Soit $g$ une fonction telle que $g(x) = x^2 + 2x + 1$ et $\lambda = -1$.
Comme $g(\lambda) = g(-1) = (-1)^2 + 2 \times (-1) + 1 = 0$, alors $\lambda$ est une racine de $g$.

**Propriété 3**
Soit $f$ une fonction polynôme du second degré.
Si $f$ possède une racine $x_1$ alors il existe un réel $x_2$ tel que pour tout réel $x$ :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

**Remarque**

— Si $x_1 \neq x_2$ on dit que $f$ possède deux racines distinctes.

— Si $x_1 = x_2$ on dit que $f$ possède une racine double.

— S'il n'existe pas de réel $x_1$ tel que $f(x_1) = 0$ on dit que $f$ ne possède pas de racines.

**Exemples**

1. Soit $g$ une fonction polynomiale telle que $g(2) = g(-3) = 0$ alors $g$ est factorisable et l'on a : $g(x) = a(x - 2)(x - (-3)) = a(x - 2)(x + 3)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.
2. Soit $h(x) = 3x^2 + 9x + 6$ tel que $h(-1) = 0$ alors $g$ admet une racine $x_1 = -1$ et l'on a : $h(x) = 3(x + 1)(x - x_2) = 3x^2 + 3(1 - x_2)x - 3x_2$. Par comparaison nous en déduisons que $-3x_2 = 6$ donc $x_2 = -2$. Alors $h(x) = 3(x + 1)(x + 2)$.

### 2.2 Somme et produit des racines

**Propriété 4**
Soit $f$ une fonction polynôme du second degré de forme développée $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Si $f$ a deux racines $x_1$ et $x_2$ alors la somme $S$ et le produit $P$ des racines sont donnés par :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

*Démonstration*

### 2.3 Signe d'une fonction polynôme du second degré sous forme factorisée

**Propriété 5**
Soit $f$ une fonction polynôme de forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1 \leq x_2$.

— $f$ est du signe de $a$ à l'extérieur des racines, sur $]-\infty\ ;\ x_1[ \cup ]x_2\ ;\ +\infty[$.

— $f$ est du signe de $-a$ à l'intérieur des racines, sur $]x_1\ ;\ x_2[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | signe de $(a)$ | \| | signe de $(-a)$ | \| | signe de $(a)$ | |

**Exemple**
Soit $f$ une fonction polynômiale de degré deux telle que $f(x) = 2(x - 5)(x + 12)$.
Les racines de $f$ sont donc $-12$ et $5$.
De plus $a = 2 \geq 0$, nous pouvons donc en déduire le signe de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-12$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | \| | $-$ | \| | $+$ | |

## Fin de Chapitre