Chapitre 1. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Exercices

Boulanger Yann

04 septembre 2025

Table des matières

1 Divibilité dans $\in \mathbb{Z}$ - Division Euclidienne

1.1 Exercice 1

Déterminer, dans $\mathbb{Z}$, les diviseurs communs de 12 et de 50.

1.2 Exercice 2

1. Donner deux nombres impairs consécutifs et vérifier que leur somme est divisible par 4.
2. Démontrer, que la somme de deux entiers impairs consécutifs est divisible par 4.

1.3 Exercice 3

Déterminer dans chaque cas les entiers naturels x et y tels que :

1. $x^2 - y^2 = 12$.
2. $x^2 - y^2 = -15$.

1.4 Exercice 4

Dans chaque cas, déterminer tous les entiers naturels n tels que :

1. 11 divise $n + 3$.
2. 6 divise $3n - 9$.

1.5 Exercice 5

1. Déterminer les entiers naturels n tels que $2n - 7$ divise 5.
2. Déterminer les entiers relatifs n tels que $n + 4$ divise 6.

1.6 Exercice 6

Déterminer les entiers naturels n tels que $4n + 1$ divise $n - 3$.

1.7 Exercice 7

Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(x; y)$ vérifiant $x + y = xy$.

1.8 Exercice 8

Dans chaque cas, déterminer tous les entiers naturels n tels que :

1. $n + 6$ soit divisible par n ;
2. $n + 11$ soit divisible par $n - 1$;
3. $n - 3$ divise $n + 2$.

1.9 Exercice 9

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 2^{3n} - 3^n$.

1. Calculer a_1, a_2 et a_3 puis conjecturer l'existence d'un diviseur de a_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Démontrer cette conjecture par récurrence.

1.10 Exercice 10

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 5^n$ est divisible par 3.

1.11 Exercice 11

Soient a et b deux entiers relatifs. Démontrer que :

$$13 \mid (8a + 5b) \iff 13 \mid (5a + 8b).$$

1.12 Exercice 12

1. Déterminer pour quels entiers naturels n l'entier $n + 1$ divise $3n + 8$.
2. Déterminer les restes possibles dans la division de $3n + 8$ par $n + 1$.

1.13 Exercice 13

Démontrer que pour tout entier relatif n, $n(n + 1)(2n + 1)$ est un divisible par 3.

1.14 Exercice 14

On considère les nombres de 4 chiffres palindromes, c'est-à-dire s'écrivant de façon symétrique. Par exemple, 1001 et 5885 sont palindromes. Démontrer que tous les nombres palindromes à 4 chiffres sont divisibles par 11.

1.15 Exercice 15

Démontrer que, quel que soit l'entier relatif n, $3n - 1$ et $5n - 2$ sont premiers entre eux.

1.16 Exercice 16 - D'après BAC

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7. En déduire que $2^{3n+1} - 2$ et $2^{3n+2} - 4$ sont aussi des multiples de 7.
2. Déterminer les restes dans la division par 7 des puissances de 2.
3. Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.
   (a) Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?
   (b) Démontrer que si $p = 3n + 1$ alors A_p est divisible par 7.
   (c) Étudier le cas où $p = 3n + 2$.

1.17 Exercice 17

Un élève veut étudier la parité de $a^2 + b^2$ quand a et b sont impairs. Analyser sa solution.

On peut écrire ce sous la forme $a+b$, et il faut faire partie de b. Donc, $a^2+b^2 = 4h^2+4h+1+4h^2+4h+1$. Soit $a^2 + b^2 = 2(4h^2 + 4h + 1 + 4h^2 + 4h + 1)$. $a^2 + b^2$ est donc un nombre pour...

1.18 Exercice 18

1. Déterminer suivant les valeurs de n le reste dans la division euclidienne de $7n + 5$ par $3n + 1$.
2. Déterminer suivant les valeurs de n le reste dans la division euclidienne de $3^n - 1$ par 3^{n-1}.

1.19 Exercice 19

Quel est le reste dans la division euclidienne de 23^{41} par 7 ?

1.20 Exercice 20

Démontrer que $1^{2013} + 2^{2013} + 3^{2013} + 4^{2013}$ est divisible par 5.

1.21 Exercice 21

Trouver le reste dans la division euclidienne de 2 690 549 588 157 par 97.

1.22 Exercice 22

Démontrer que 9^{22} et 9^{20} ont le même chiffre des unités.