Chapitre 1. Congruence. Exercices

Boulanger Yann

04 septembre 2025

Table des matières

1 Apprendre à calculer avec les congruences **2**

2 Chiffre des unités avec les congruences **2**

3 Déterminer un reste avec les congruences **2**

4 Déterminer un reste avec les congruences **3**

5 Savoir si un nombre est divisible par . . . à l'aide des congruences **3**

6 Déterminer le chiffre des unités avec les congruences **3**

7 Résoudre une équation avec les congruences **4**

8 Montrer qu'un nombre est divisible avec les congruences **4**

9 Disjonction de cas et congruence **4**

10 Critères de divisibilité par 3 et 9 **4**

11 Critère de divisibilité par 11 **5**

12 Critère de divisibilité par 7 **5**

13 Pièges et erreurs classiques sur les congruences **5**

14 Déterminer les entiers naturels n pour lesquels $n^2 - 2n$ est divisible par 7 **6**

15 Résoudre $ax = b$ avec les congruences **6**

16 Compatibilité de l'addition avec les congruences **7**

17 Compatibilité de la multiplication avec les congruences **7**

18 Compatibilité des puissances avec les congruences **7**

19 Suite et congruence **8**

20 Nombres de Fermat **8**

1 Apprendre à calculer avec les congruences

1. **Corrigé :**
   - $115 \div 11 = 10 \times 11 + 5$, donc $115 \equiv 5$ [11]
   - $27 \div 11 = 2 \times 11 + 5$, donc $27 \equiv 5$ [11]
   - Ainsi $115 \equiv 27$ [11]
   - $-39 + 4 \times 11 = -39 + 44 = 5$, donc $-39 \equiv 5$ [11]
   - Ainsi $-39 \equiv 27$ [11]
2. **Corrigé :**
   - $n \equiv 27$ [11] $\Rightarrow n \equiv 5$ [11] car $27 \equiv 5$ [11]
   - $n \equiv 4$ [7]
   - On cherche $n < 100$ tel que $n = 11k + 5$ et $n = 7m + 4$
   - $11k + 5 = 7m + 4 \Rightarrow 11k - 7m = -1$
   - Solutions : $k = 5, m = 8 \Rightarrow n = 11 \times 5 + 5 = 60$
   - Vérification : $60 \div 7 = 8 \times 7 + 4$
3. **Corrigé :**
   - $n \equiv 27$ [11] $\Rightarrow n \equiv 5$ [11]
   - $n = 11k + 5$ avec $0 \leq n < 1000$
   - $0 \leq 11k + 5 < 1000 \Rightarrow -5 \leq 11k < 995$
   - k entier $\Rightarrow k = 0, 1, 2, ..., 90$
   - Il y a 91 entiers naturels congrus à 27 modulo 11 inférieurs à 1000

2 Chiffre des unités avec les congruences

Corrigé :

- $3^1 = 3 \equiv 3$ [10]
- $3^2 = 9 \equiv 9$ [10]
- $3^3 = 27 \equiv 7$ [10]
- $3^4 = 81 \equiv 1$ [10]
- $3^5 = 243 \equiv 3$ [10] (cycle de période 4)
- $2015 = 4 \times 503 + 3$
- $3^{2015} = (3^4)^{503} \times 3^3 \equiv 1^{503} \times 7 \equiv 7$ [10]
- Le dernier chiffre est 7

3 Déterminer un reste avec les congruences

1. **Corrigé :**
   - $451 \div 7 = 64 \times 7 + 3 \Rightarrow 451 \equiv 3$ [7]
   - $6 \div 7 = 0 \times 7 + 6 \Rightarrow 6 \equiv 6$ [7]
   - $6^2 = 36 \equiv 1$ [7] car $35 = 5 \times 7$
   - $6^{43} = (6^2)^{21} \times 6 \equiv 1^{21} \times 6 \equiv 6$ [7]
   - $451 \times 6^{43} \equiv 3 \times 6 \equiv 18 \equiv 4$ [7]
   - $912 \div 7 = 130 \times 7 + 2 \Rightarrow 912 \equiv 2$ [7]

- $451 \times 6^{43} - 912 \equiv 4 - 2 \equiv 2$ [7]
- Le reste est 2

2. **Corrigé :**
   - $3^1 = 3 \equiv 3$ [10]
   - $3^2 = 9 \equiv 9$ [10]
   - $3^3 = 27 \equiv 7$ [10]
   - $3^4 = 81 \equiv 1$ [10] (cycle de période 4)
   - $2017 = 4 \times 504 + 1$
   - $3^{2017} = (3^4)^{504} \times 3^1 \equiv 1^{504} \times 3 \equiv 3$ [10]
   - Le dernier chiffre est 3
3. **Corrigé :**
   - Supposons n impair : $n \equiv 1$ [2]
   - Alors $n^2 \equiv 1$ [2] donc n^2 impair
   - Par contraposée : si n^2 pair alors n pair

4 Déterminer un reste avec les congruences

Corrigé : (identique à l'exercice 3.1)

- Le reste est 2

5 Savoir si un nombre est divisible par ...à l'aide des congruences

Corrigé :

- $4 \equiv 4$ [11], $4^2 = 16 \equiv 5$ [11], $4^3 = 64 \equiv 9$ [11], $4^4 = 256 \equiv 3$ [11], $4^5 = 1024 \equiv 1$ [11]
- Cycle de période 5 : $4^n \equiv 4^{n \mod 5}$ [11]
- $3 \times 4^n + 2 \equiv 0$ [11] $\Leftrightarrow 3 \times 4^n \equiv -2 \equiv 9$ [11]
- $4^n \equiv 3$ [11] (car $3 \times 3 = 9 \equiv 9$ [11])
- $4^n \equiv 3$ [11] quand $n \equiv 4$ [5] (car $4^4 = 256 \equiv 3$ [11])
- Solutions : $n = 5k + 4$ avec $k \in \mathbb{N}$

6 Déterminer le chiffre des unités avec les congruences

1. **Corrigé :**
   - $7^1 = 7 \equiv 7$ [10]
   - $7^2 = 49 \equiv 9$ [10]
   - $7^3 = 343 \equiv 3$ [10]
   - $7^4 = 2401 \equiv 1$ [10]
2. **Corrigé :**
   - $7^4 \equiv 1$ [10]
   - $98 = 4 \times 24 + 2$
   - $7^{98} = (7^4)^{24} \times 7^2 \equiv 1^{24} \times 49 \equiv 9$ [10]
   - Le chiffre des unités est 9

7 Résoudre une équation avec les congruences

1. **Corrigé :**
   - Si $(x; y)$ solution de $x^2 - 7y^2 = 3$
   - Alors $x^2 = 3 + 7y^2 \equiv 3$ [7]
2. **Corrigé :**
   - $0^2 = 0 \equiv 0$ [7]
   - $1^2 = 1 \equiv 1$ [7]
   - $2^2 = 4 \equiv 4$ [7]
   - $3^2 = 9 \equiv 2$ [7]
   - $4^2 = 16 \equiv 2$ [7]
   - $5^2 = 25 \equiv 4$ [7]
   - $6^2 = 36 \equiv 1$ [7]
   - Les restes possibles sont : 0, 1, 2, 4
3. **Corrigé :**
   - $x^2 \equiv 3$ [7] mais 3 n'apparaît pas dans la liste des restes possibles
   - L'équation n'a pas de solution

8 Montrer qu'un nombre est divisible avec les congruences

Corrigé :

- $2^4 = 16 \equiv 1$ [5]
- $3^4 = 81 \equiv 1$ [5]
- $2^{4n+1} = 2 \times (2^4)^n \equiv 2 \times 1^n \equiv 2$ [5]
- $3^{4n+1} = 3 \times (3^4)^n \equiv 3 \times 1^n \equiv 3$ [5]
- $2^{4n+1} + 3^{4n+1} \equiv 2 + 3 \equiv 5 \equiv 0$ [5]
- Donc divisible par 5

9 Disjonction de cas et congruence

Corrigé :

- Cas 1 : $n \equiv 0$ [3] $\Rightarrow n(n^2 + 5) \equiv 0$ [3]
- Cas 2 : $n \equiv 1$ [3] $\Rightarrow n^2 + 5 \equiv 1 + 5 \equiv 6 \equiv 0$ [3]
- Cas 3 : $n \equiv 2$ [3] $\Rightarrow n^2 + 5 \equiv 4 + 5 \equiv 9 \equiv 0$ [3]
- Dans tous les cas, $n(n^2 + 5) \equiv 0$ [3]

10 Critères de divisibilité par 3 et 9

1. **Corrigé :**
   - $10 \equiv 1$ [3] donc $10^k \equiv 1$ [3] pour tout k
   - $a = a_n \times 10^n + ... + a_1 \times 10 + a_0 \equiv a_n + ... + a_1 + a_0$ [3]
   - Donc $a \equiv 0$ [3] $\Leftrightarrow$ somme des chiffres $\equiv 0$ [3]
2. **Corrigé :**

— Même démonstration avec $10 \equiv 1$ [9]

3. **Corrigé :**
   — Somme des chiffres : $8+1+7+6+3+1+2+4+5+9+1+0+2+5+3+5+2+1+4+6+2+1 = 82$
   — $82 \div 3 = 27 \times 3 + 1$ donc pas divisible par 3
   — $82 \div 9 = 9 \times 9 + 1$ donc pas divisible par 9

11 Critère de divisibilité par 11

1. **Corrigé :**
   — $10 \equiv -1$ [11] donc $10^k \equiv (-1)^k$ [11]
   — $a = a_n \times 10^n + ... + a_1 \times 10 + a_0 \equiv a_n(-1)^n + ... + a_1(-1) + a_0$ [11]
   — Donc $a \equiv (a_0 + a_2 + a_4 + ...) - (a_1 + a_3 + a_5 + ...)$ [11]
2. **Corrigé :**
   — $6 + 9 + 8 + 2 + 0 + 5 = 30$ (chiffres rang impair)
   — $1 + 8 + 5 + 8 = 22$ (chiffres rang pair)
   — $30 - 22 = 8$ non divisible par 11
   — Donc 619852805 n'est pas divisible par 11

12 Critère de divisibilité par 7

1. **Corrigé :**
   — 4361 : $436 - 2 \times 1 = 434$, $43 - 2 \times 4 = 35$ divisible par 7
   — 542 : $54 - 2 \times 2 = 50$ non divisible par 7 donc faux
2. **Corrigé :**
   (a) $n = 100a + 10b + c$
   (b) $100 \equiv 2$ [7], $10 \equiv 3$ [7]
   (c) $n \equiv 100a + 10b + c \equiv 2a + 3b + c$ [7]
   (d) $m = 10a + b - 2c$
   (e) $10 \equiv 3$ [7]
   (f) $m \equiv 10a + b - 2c \equiv 3a + b - 2c$ [7]
   (g) $n - 3m \equiv (2a + 3b + c) - 3(3a + b - 2c) \equiv 2a + 3b + c - 9a - 3b + 6c \equiv -7a + 7c \equiv 0$ [7]
   (h) $m + 2n \equiv (3a + b - 2c) + 2(2a + 3b + c) \equiv 3a + b - 2c + 4a + 6b + 2c \equiv 7a + 7b \equiv 0$ [7]
   (i) Si $m \equiv 0$ [7] alors $n \equiv 3m \equiv 0$ [7]
   (j) Si $n \equiv 0$ [7] alors $m \equiv -2n \equiv 0$ [7]
   (k) Donc équivalence

13 Pièges et erreurs classiques sur les congruences

1. **Faux** : Contre-exemple : $2 \times 3 = 6 \equiv 0$ [6] mais $2 \not\equiv 0$ [6] et $3 \not\equiv 0$ [6]
2. **Faux** : $2x \equiv 4$ [12] $\Rightarrow x \equiv 2$ [6] mais pas modulo 12
3. **Vrai** : $2x \equiv 4$ [12] $\Rightarrow x \equiv 2$ [6]
4. **Vrai** : $7 - x \equiv 5$ [3] $\Rightarrow -x \equiv -2$ [3] $\Rightarrow x \equiv 2$ [3]
5. **Vrai** : Vérification pour $x = 0, 1, 2, 3$ modulo 4

14 Déterminer les entiers naturels n pour lesquels $n^2 - 2n$ est divisible par 7

Corrigé :

- $n^2 - 2n = n(n-2)$
- On étudie modulo 7 :
- $n \equiv 0\ [7] \Rightarrow n(n-2) \equiv 0\ [7]$
- $n \equiv 1\ [7] \Rightarrow 1 \times (-1) \equiv -1 \not\equiv 0\ [7]$
- $n \equiv 2\ [7] \Rightarrow 2 \times 0 \equiv 0\ [7]$
- $n \equiv 3\ [7] \Rightarrow 3 \times 1 \equiv 3 \not\equiv 0\ [7]$
- $n \equiv 4\ [7] \Rightarrow 4 \times 2 \equiv 8 \equiv 1 \not\equiv 0\ [7]$
- $n \equiv 5\ [7] \Rightarrow 5 \times 3 \equiv 15 \equiv 1 \not\equiv 0\ [7]$
- $n \equiv 6\ [7] \Rightarrow 6 \times 4 \equiv 24 \equiv 3 \not\equiv 0\ [7]$
- Solutions : $n \equiv 0\ [7]$ ou $n \equiv 2\ [7]$

15 Résoudre $ax = b$ avec les congruences

1. **Corrigé :**

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7
$4x \equiv$	0	4	8	3	7	2	6	1

2. **Corrigé :**
   - $4x \equiv 5\ [9]$
   - D'après le tableau, $4 \times 8 = 32 \equiv 5\ [9]$
   - Solution : $x \equiv 8\ [9]$
3. **Corrigé :**
   - $4 \times 7 \equiv 1\ [9] \Rightarrow 7 \equiv 4^{-1}\ [9]$
   - $7x \equiv 8\ [9] \Rightarrow x \equiv 7^{-1} \times 8 \equiv 4 \times 8 \equiv 32 \equiv 5\ [9]$
4. **Corrigé :**
   - $3x \equiv 6\ [9]$
   - PGCD(3,9)=3 et 3 divise 6 donc solutions
   - $x \equiv 2\ [3]$
   - Solutions modulo 9 : $x \equiv 2, 5, 8\ [9]$

Corrigé démonstration :

- **Méthode 1 :** $3^{2n} - 1 = (3^n - 1)(3^n + 1)$
- Parmi deux nombres pairs consécutifs, l'un est divisible par 4
- Donc produit divisible par 8
- **Méthode 2 :** Par récurrence
- $3^2 - 1 = 8$ divisible par 8
- Si $3^{2n} - 1$ divisible par 8
- Alors $3^{2(n+1)} - 1 = 9 \times 3^{2n} - 1 = 8 \times 3^{2n} + (3^{2n} - 1)$ divisible par 8

16 Compatibilité de l'addition avec les congruences

1. **Corrigé :**
   - $a \equiv b\ [n] \Rightarrow n \mid (a-b)$
   - $c \equiv d\ [n] \Rightarrow n \mid (c-d)$
   - Donc $n \mid [(a-b)+(c-d)] = (a+c)-(b+d)$
   - Donc $a+c \equiv b+d\ [n]$
2. **Corrigé :** Cas particulier avec $c = d$
3. **Corrigé :**
   - Réciproque fausse
   - Contre-exemple : $5+3 \equiv 2+3\ [3]$ mais $5 \not\equiv 2\ [3]$

17 Compatibilité de la multiplication avec les congruences

1. **Corrigé :**
   - $a \equiv b\ [n] \Rightarrow n \mid (a-b)$
   - $c \equiv d\ [n] \Rightarrow n \mid (c-d)$
   - $ac - bd = a(c-d) + d(a-b)$
   - Donc $n \mid (ac-bd)$
2. **Corrigé :** Cas particulier avec $c = d$
3. **Corrigé :**
   (a) $6 \times 5 = 30 \equiv 6\ [12]$, $6 \times 7 = 42 \equiv 6\ [12]$
   (b) Réciproque fausse
   (c) Contre-exemple : $6 \times 5 \equiv 6 \times 7\ [12]$ mais $5 \not\equiv 7\ [12]$

18 Compatibilité des puissances avec les congruences

1. **Corrigé :** Par récurrence
   - Initialisation : $a^1 \equiv b^1\ [n]$
   - Hérédité : si $a^p \equiv b^p\ [n]$ alors $a^{p+1} \equiv a \times a^p \equiv b \times b^p \equiv b^{p+1}\ [n]$
2. **Corrigé :**
   - $41 \div 7 = 5 \times 7 + 6 \Rightarrow 41 \equiv 6\ [7]$
   - $41^{183} \equiv 6^{183}\ [7]$
   - $6^1 \equiv 6\ [7]$, $6^2 \equiv 36 \equiv 1\ [7]$, $6^3 \equiv 6\ [7]$, $6^4 \equiv 1\ [7]$, ...
   - 183 impair donc $6^{183} \equiv 6\ [7]$
3. **Corrigé :**
   (a) $2^3 = 8 \equiv 1\ [7]$, $4^3 = 64 \equiv 1\ [7]$
   (b) Non, contre-exemple : $2^3 \equiv 4^3\ [7]$ mais $2 \not\equiv 4\ [7]$
4. **Corrigé :**
   (a) $2^2 = 4 \equiv 1\ [3]$, $2^5 = 32 \equiv 2\ [3]$ donc $4 \not\equiv 2\ [3]$ donc faux
   (b) Non, $2 \equiv 5\ [3]$ mais $3^2 = 9 \equiv 0\ [3]$, $3^5 = 243 \equiv 0\ [3]$
   (c) Mais pas toujours vrai : $2 \equiv 5\ [3]$ mais $4^2 = 16 \equiv 1\ [3]$, $4^5 = 1024 \equiv 1\ [3]$

19 Suite et congruence

1. **Corrigé :**
   - $u_0 = 14$
   - $u_1 = 5 \times 14 - 6 = 64$
   - $u_2 = 5 \times 64 - 6 = 314$
   - $u_3 = 5 \times 314 - 6 = 1564$
   - $u_4 = 5 \times 1564 - 6 = 7814$
   - Conjecture : Les deux derniers chiffres semblent alterner entre 14 et 64
2. **Corrigé :**
   (a) $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 36$
   (b) $25 \equiv 1$ [4], $36 \equiv 0$ [4]
   (c) Donc $u_{n+2} \equiv u_n$ [4]
   (d) $u_0 = 14 \equiv 2$ [4], $u_1 = 64 \equiv 0$ [4]
   (e) Par récurrence : $u_{2k} \equiv 2$ [4], $u_{2k+1} \equiv 0$ [4]
   (f) Initialisation : $2u_0 = 28 = 5^2 + 3$
   (g) Hérédité : si $2u_n = 5^{n+2} + 3$
   (h) Alors $2u_{n+1} = 10u_n - 12 = 5(5^{n+2} + 3) - 12 = 5^{n+3} + 15 - 12 = 5^{n+3} + 3$
   (i) $5^2 = 25 \equiv 25$ [100]
   (j) $5^3 = 125 \equiv 25$ [100]
   (k) $5^4 = 625 \equiv 25$ [100]
   (l) Par récurrence : $5^{n+2} \equiv 25$ [100] pour $n \geq 0$
   (m) $2u_n = 5^{n+2} + 3 \equiv 25 + 3 \equiv 28$ [100]
   (n) Donc $u_n \equiv 14$ [100] si n pair, $u_n \equiv 64$ [100] si n impair

20 Nombres de Fermat

1. **Corrigé :**
   (a) $F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$
   (b) $F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$
   (c) $F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$
   (d) $F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$
   (e) $F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$
   (f) Tous premiers
   (g) $F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297$
   (h) $4294967297 \div 641 = 6700417$
   (i) Donc F_5 n'est pas premier
   (j) Question : Les nombres de Fermat sont-ils tous premiers ?
2. **Corrigé :**
   (a) $F_{n+1} = 2^{2^{n+1}} + 1 = (2^{2^n})^2 + 1 = (F_n - 1)^2 + 1$
   (b) Initialisation : $F_2 = 17$ se termine par 7.
   (c) Hérédité : si F_n se termine par 7.
   (d) Alors $F_n - 1$ se termine par 6.
   (e) $(F_n - 1)^2$ se termine par 6 (car $6^2 = 36$)

(f) $(F_n - 1)^2 + 1$ se termine par 7.

Corrigé rep-units :

1. **Corrigé :**
   (a) Si n^2 se termine par 1, alors n se termine par 1 ou 9
   (b) $n = 10k \pm 1$
   (c) $n^2 = 100k^2 \pm 20k + 1 \equiv 1\ [20]$ car $100k^2 \equiv 0\ [20]$, $20k \equiv 0\ [20]$
2. **Corrigé :**
   — $N_p = 111...1$ (p fois)
   — $N_p \equiv p\ [10]$ car chaque 1 contribue 1 modulo 10
   — Pour que N_p soit un carré parfait, il faudrait $N_p \equiv 1\ [20]$
   — Mais $N_p \equiv p\ [10]$ et p peut être pair
   — Seul $N_1 = 1$ est un carré parfait