

Chapitre 5. Nombres Complexes

point de vue géométrique

Boulanger Yann

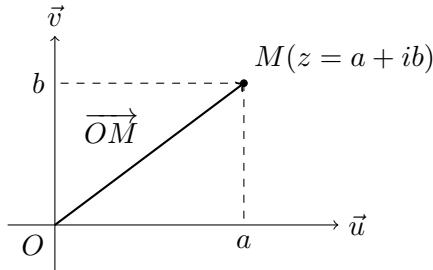
23 juin 2025

Table des matières

1	Représentation d'un nombre complexe	2
2	Module et Argument	2
2.1	Module	2
2.2	Argument et Trigonométrie	3
2.3	Forme exponentielle	4
2.3.1	Définition	4
2.3.2	Formules d'Euler	4
3	Nombres complexes de module 1	4
3.1	Formule de de Moivre	4
3.2	Linéarisation de $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$	4
4	Racines n-ièmes de l'unité	6

1 Représentation d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ un nombre complexe. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on peut associer à z le point $M(a, b)$. On dit que M est l'image de z . Réciproquement, à tout point $M(a, b)$ du plan, on peut associer un unique complexe z , défini par $z = a + ib$, z est appelé affixe de M ; on dit aussi que z est l'affixe du vecteur \overrightarrow{OM} .



2 Module et Argument

2.1 Module

Définition 5

Pour $z = a + ib$, on définit

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}} \in \mathbb{R}^+.$$

Proposition 3

On a $|z| \geq 0$ avec égalité $\iff z = 0$.

Proposition 4

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|.$$

L'égalité gauche tient $\iff z \in \mathbb{R}^+$ et la droite $\iff z \in i\mathbb{R}^+$.

Proposition 5

Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ [Inégalité triangulaire].

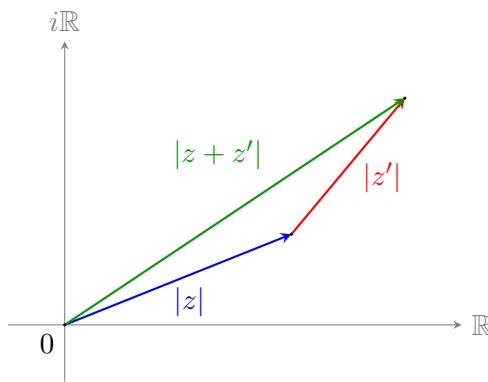


FIGURE 1 – Illustration géométrique de l'inégalité triangulaire dans \mathbb{C} .

Exemple

Dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales égale la somme des carrés des côtés. Si les longueurs des côtés sont notées L et l et les longueurs des diagonales sont D et d , alors :

$$D^2 + d^2 = 2l^2 + 2L^2$$

Démonstration

Considérons le parallélogramme de sommets $0, z, z'$ et $z + z'$. Alors :

$$D^2 + d^2 = |z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2 = 2l^2 + 2L^2$$

Mini-Exercices

1. Calculer $1 - 2i + \frac{i}{1-2i}$.
2. Écrire sous la forme $a + ib$ les nombres complexes $(1+i)^2, (1+i)^3, (1+i)^4, (1+i)^8$.
3. En déduire $1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^7$.
4. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|1+iz| = |1-iz|$, montrer que $z \in \mathbb{R}$.
5. Montrer que si $|\operatorname{Re} z| \leq |\operatorname{Re} z'|$ et $|\operatorname{Im} z| \leq |\operatorname{Im} z'|$ alors $|z| \leq |z'|$, mais que la réciproque est fausse.
6. Montrer que $\frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$ (pour $z \neq 0$).

2.2 Argument et Trigonométrie

Définition 6

Pour $z \neq 0$, tout réel θ tel que $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ est un *argument* de z . Si θ est un argument, alors $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) l'est aussi.

Remarque 1

On peut imposer à cet argument d'être unique si on rajoute la condition $\theta \in [-\pi, +\pi]$. Alors l'argument est appelé **argument principal** et est noté $\operatorname{Arg}(z)$.

Remarque 2

$$\theta \equiv \theta' [2\pi] \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \theta' + 2k\pi \iff \begin{cases} \cos \theta = \cos \theta' \\ \sin \theta = \sin \theta' \end{cases}$$

Proposition 5.

L'argument satisfait les propriétés suivantes :

- $\operatorname{arg}(zz') \equiv \operatorname{arg}(z) + \operatorname{arg}(z')[2\pi]$
- $\operatorname{arg}(z^n) \equiv n \operatorname{arg}(z)[2\pi]$
- $\operatorname{arg}(1/z) \equiv -\operatorname{arg}(z)[2\pi]$
- $\operatorname{arg}(\bar{z}) \equiv -\operatorname{arg}(z)[2\pi]$

Démonstration.

$$\begin{aligned} zz' &= |z|(\cos \theta + i \sin \theta)|z'|(\cos \theta' + i \sin \theta') = |zz'|(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta')) \\ &= |zz'|(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')) \text{ donc } \operatorname{arg}(zz') \equiv \operatorname{arg}(z) + \operatorname{arg}(z') \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

On en déduit les deux autres propriétés, dont la deuxième par récurrence.

2.3 Forme exponentielle

2.3.1 Définition

Définition 7

Écrite avec $r = |z| > 0$ et un argument θ , la **forme exponentielle** d'un complexe non nul est

$$z = r e^{i\theta} \quad \text{où} \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Remarque :

On retrouve alors la célèbre formule liant des grands nombres des mathématiques : $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Connu dans un premier temps par Roger Cotes, cette formule fût citée par Léonhard Euler dans son livre d'analyse de 1748 *Introductio in analysin infinitorum*.

Proposition 4

Pour tous $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}, \quad |e^{i\theta}| = 1, \quad e^{i\theta} e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}.$$

Démonstration faite en cours.

Exemple

Soit $z = 1 + i$. Alors $|z| = \sqrt{2}$ et un argument est $\theta = \frac{\pi}{4}$, puisque $z = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}}$.

2.3.2 Formules d'Euler

Formules d'Euler

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Démonstration faite en cours.

3 Nombres complexes de module 1

3.1 Formule de de Moivre

Formule de de Moivre

$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Démonstration faite en cours.

Exemples :

Cette formule permet d'exprimer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en puissance de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

- $\cos(3x) = \operatorname{Re}[(\cos(3x) + i \sin(3x))] = \operatorname{Re}[(\cos(x) + i \sin(x))^3] = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin(x)$;
- $\sin(3x) = \operatorname{Im}[(\cos(3x) + i \sin(3x))] = \operatorname{Im}[(\cos(x) + i \sin(x))^3] = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)$.

Exercice : simplifier les résultats précédent en les exprimant uniquement avec \cos ou \sin .

3.2 Linéarisation de $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$

La linéarisation consiste à écrire $\cos^n(x)$ ou $\sin^n(x)$ en une combinaison linéaire de $\cos(kx)$ ou $\sin(kx)$.

La linéarisation permet de trouver une primitive d'une fonction circulaire.

On utilise conjointement les formules d'Euler et la formule du binôme :

$$\cos^n(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^n, \quad \sin^n(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^n.$$

Exemple : Linéariser $\cos^3 x$ et $\sin^3 x$ puis calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx$.

$$\begin{aligned}\cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}) \\ &= \frac{1}{8} (e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) = \frac{1}{4} \left(\frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + 3 \times \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (\cos 3x + 3 \cos x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = -\frac{1}{8i} (e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}) \\ &= -\frac{1}{8i} (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) = -\frac{1}{4} \left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} - 3 \times \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) \\ &= -\frac{1}{4} (\sin 3x - 3 \sin x) = \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin 3x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin x - \sin 3x) \, dx = \frac{1}{4} \left[-3 \cos x + \frac{\cos 3x}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \left(-0 + 0 + 3 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

4 Racines n -ièmes de l'unité

Théorème 1

Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des solutions dans \mathbb{C} de $z^n = 1$ est

$$U_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \{0, \dots, n-1\}\}.$$

Démonstration

Écrivons $z = r e^{i\theta}$ avec $r > 0$. L'égalité $z^n = 1$ donne $r^n = 1 \Rightarrow r = 1$, et $e^{in\theta} = 1 \Rightarrow n\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$. D'où $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$, et la restriction $0 \leq k < n$ fournit les n racines distinctes.

Principe

Pour résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^n = c$, où $c = \rho e^{i\theta} \neq 0$, on se ramène au cas $c = 1$.

En effet, le nombre complexe $z_0 = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta}{n}}$ est une racine particulière de $\rho e^{i\theta}$.

On en déduit que :

$$z^n = c \Leftrightarrow z^n = (z_0)^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{z_0} \in U_n.$$

Remarque : Géométriquement, les racines forment un polygone à n côtés.

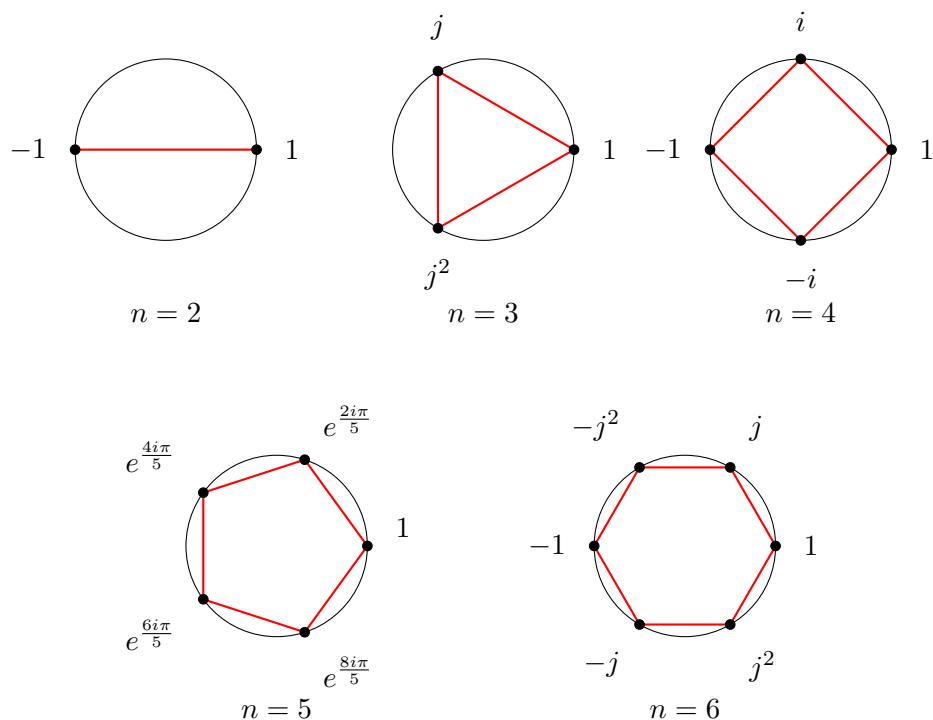


FIGURE 2 – Racines n -ième de l'unité avec polygones réguliers pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Exemples

- Résolution de $z^6 = -1$. On a $-1 = e^{i\pi}$, donc les solutions sont les $e^{\frac{i\pi}{6}} \omega^k$, avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{6}}$ et $0 \leq k \leq 5$.
Donc les racines 6-ième de -1 sont les $e^{i\theta}$, avec $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{6}$, et $0 \leq k \leq 5$.
- Résolution de $z^4 = -4$.
On a $-4 = 4e^{i\pi}$, donc les solutions sont les $\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} i^k$, c'est-à-dire $1+i, -1+i, -1-i$ et $1-i$.

Fin de chapitre