Chapitre 4. Notion de Matrice

Boulanger Yann

24 juin 2025

Table des matières

1 Introduction

Historiquement c'est Cayley, parallèlement aux travaux de Grassmann, qui dégage la notion d'espace vectoriel de dimension n, et introduit, avec Sylvester, la notion de matrice (le terme sera introduit par ce dernier en 1850) et en expose l'usage en faisant emploi des déterminants (dont l'initiateur fut Cauchy) dans une théorie plus large dite *des invariants* (1858) : on entend là des propriétés matricielles invariantes par transformation linéaire comme, par exemple, le déterminant et la trace (somme des éléments diagonaux).

2 Définition

2.1 Définition

Définition 1

- Une *matrice* A est un tableau rectangulaire d'éléments de K.
- Elle est dite de *taille* $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.
- Les éléments du tableau sont appelés *coefficients* de A.
- Le coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne est noté $a_{i,j}$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}, \qquad A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$$

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice 2×3 avec, par exemple, $a_{1,1} = 1$ et $a_{2,3} = 7$.

Définition 2
Deux matrices sont égales lorsqu'elles ont la même taille et que leurs coefficients correspondants sont égaux. L'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

2.2 Matrices particulières

- **Matrice carrée :** $n = p$. On note alors $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
- **Vecteur ligne :** $n = 1$.
- **Vecteur colonne :** $p = 1$.
- **Matrice nulle :** tous les coefficients sont nuls, notée $0_{n,p}$ ou simplement 0.
- **Matrice diagonale :** $\forall i \neq j, a_{i,j} = 0$.
- **Matrice identité :** $\forall i \neq j, a_{i,j} = 0$ et $\forall i = j, a_{i,j} = 1$. Elle est notée I_n.

2.3 Addition de matrices

Définition 3
Soient $A, B \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Leur *somme* est la matrice $C = A + B \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Exemple :

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, alors $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Définition 4
Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ et $A = (a_{ij})$, on définit $\alpha A = (\alpha a_{ij})$.

Exemple 1 :

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A - B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1
Pour $A, B, C \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

1) $A + B = B + A$,
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$,
3) $A + 0 = A$,
4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

Exercice 1

1. Avec $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 0 & 3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer toutes les sommes possibles de deux matrices.
   (b) Calculer $3A + 2C$, $5B - 4D$.
   (c) Trouver α tel que $A - \alpha C$ soit une matrice nulle.
2. Montrer que si $A + B = A$, alors B est nulle.
3. (a) Que vaut $0.A$? et $1.A$?
   (b) Justifier les affirmations suivantes
      i. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
      ii. $nA = A + A + \cdots + A$ (avec n occurence(s) de A).

3 Multiplication de matrices

3.1 Définition du produit

Le produit AB est défini si le nombre de colonnes de A égale le nombre de lignes de B.
Pour $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{K})$:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$

Exemple

Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient $AB = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$.

Pièges à éviter

— Le produit n'est *pas* commutatif : on peut avoir $AB \neq BA$ ou même AB défini mais pas BA.

— On peut avoir $A \neq 0$, $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

— L'égalité $AB = AC$ n'implique pas $B = C$.

Propriétés 1
Pour toutes matrices de tailles compatibles :

1. $A(BC) = (AB)C$ (associativité),
2. $A(B + C) = AB + AC$ et $(B + C)A = BA + CA$ (distributivité),
3. $A \cdot 0 = 0$ et $0 \cdot A = 0$.

3.2 La matrice identité

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \qquad I_n A = A,\ AI_p = A.$$

3.3 Puissance d'une matrice

Définition 5
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. La matrice $A^n \in M_n(\mathbb{R})$ est définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} A^0 = I_d, \\ A^{n+1} = A \times A^n. \end{cases}$$

Remarque :
Contrairement aux nombres réels, il est possible d'obtenir la matrice nulle à partir d'une puissance d'une matrice non nulle : si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors nous pouvons vérifier que $A^2 = 0$.

Voici un exemple de matrices pour lequel il est assez simple de déterminer A^n.

Exemple
Si $A \in M_p(\mathbb{R})$ est une matrice diagonale,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{pp} \end{pmatrix} \Longrightarrow A^n = \begin{pmatrix} a_{11}^n & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^n & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{pp}^n \end{pmatrix}.$$

3.4 Formule du binôme

Si $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ commutent ($AB = BA$), alors pour tout entier $p \geq 0$

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k.$$

Exemple :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I + N$ avec N nilpotente ($N^4 = 0$).

Alors
$$A^p = I + pN + \frac{p(p-1)}{2}N^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{6}N^3.$$

4 Inverse de matrice et résolution de système

Comme nous avons pu le découvrir dans l'introduction, les matrices s'avèrent un outil commode pour représenter un système linéaire d'équations à plusieurs inconnues. Pour l'observer, revenons à l'un de nos premiers exemples :
$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ -x + 6y = -1. \end{cases}$$
Nous venons de voir qu'il était possible d'exprimer ceci en termes matriciels : $AX = B$ avec
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$
Il est donc tentant de procéder comme avec des réels : $ax = b \iff x = a^{-1}b$ (pour $a \in \mathbb{R}_*$ et $b \in \mathbb{R}$) en proposant comme solution $X = A^{-1}B$.
Toutefois, il faut donner un sens à A^{-1} ! À quelle condition un tel objet existe-t-il ? Dans $\mathbb{R}$, c'est assez simple : il faut et il suffit que a soit non nul pour que a^{-1} existe. Lorsqu'il s'agit de matrices, nous parlerons d'inversibilité. Dans un premier temps, nous allons donner une définition de ceci, puis voir de quelle manière calculer l'inverse d'une matrice carrée de taille 2.

Définition 6 Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On dira que la matrice B est l'inverse de la matrice A si la relation suivante est satisfaite :
$$AB = BA = I_d.$$
Si elle existe, une telle matrice est unique. Nous la désignerons par A^{-1}.

Remarque
La relation $AB = BA = I_d$ est similaire à celle des réels : $a \times a^{-1} = 1$.

Exemple

1. Plaçons-nous dans l'espace des matrices de taille 2×2 et considérons la matrice suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Vérifiez que la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est bien l'inverse de la matrice A.
2. Montrons que la matrice suivante n'admet pas d'inverse :
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
En effet, si une telle matrice existait, elle serait de la forme $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et satisferait la relation $CD = DC = I_d$. Autrement dit, la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

doit être égale à la matrice $I_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ce qui est absurde car $0 \neq 1$. Donc la matrice C n'est pas inversible.

Lorsque $n = 2$, il existe une formule simple à retenir pour déterminer l'inverse d'une matrice A.

Proposition 2 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Nous avons l'équivalence suivante :

$$A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \iff ad - bc \neq 0.$$

Remarque La quantité $ad - bc$ est appelée déterminant de la matrice A (noté $\det(A)$).
Ce résultat d'inversion mène facilement à la proposition suivante.

Proposition 3 Considérons un système d'équations donné sous la forme (matricielle)

$$(E) : AX = B,$$

avec $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B, X \in M_{n1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes. Si A est inversible, alors le système (E) admet une unique solution donnée par

$$X = A^{-1}B.$$

Exemple Reprenons notre exemple. Dans celui-ci, nous avons

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Puisque $\det(A) = 12 + 1 = 13 \neq 0$, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

La solution du système d'équation vaut alors

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 19 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5 Transformations du plan

Mentionnons en passant que les matrices permettent également de modéliser des transformations géométriques. Plaçons-nous dans le plan pour simplifier l'exposition.

Exemple
Supposons que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est l'application linéaire qui à un point du plan $M(x; y)$ lui fait correspondre son symétrique $M'(x'; y')$ par rapport à l'axe des ordonnées. Alors, f peut se représenter par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ à l'aide de la formule

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff X' = AX,$$

avec $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Il est possible de traiter de nombreux exemples, voire de les mélanger.

Exemple

1. La matrice associée à une rotation d'angle θ, centrée en O, est donnée par

$$\mathrm{Rot}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

2. L'homothétie de rapport $k \in \mathbb{R}$, centrée en O, se représente par la matrice

$$\mathrm{Hom}_k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Remarque

Assez curieusement, la définition formelle et rigoureuse d'un angle θ correspond à la matrice de rotation Rot_θ.

Fin de chapitre