Chapitre 2. Nombres Complexes
point de vue algébrique

Boulanger Yann

17 juin 2025

Table des matières

1 Introduction

Il est clair qu'il n'existe pas de nombre réel x qui soit solution de l'équation $x^2+1=0$.
Pour donner des solutions à cette équation et d'autres semblables, on introduit un ensemble plus grand que celui des nombres réels contenant un élément noté i (un nombre imaginaire) solution de l'équation précédente, i.e. $i^2=-1$. On appelle cet ensemble les nombres complexes.

2 Notation algébrique d'un nombre complexe

Définition 1
Pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $\mathrm{i}^2=-1$, on appelle *nombre complexe* tout élément z pouvant s'écrire

$$z \ = \ a+\mathrm{i}b,$$

L'ensemble de tous les nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Définition 2
Dans l'écriture algébrique ci-dessus, a est la *partie réelle*, notée $\mathrm{Re}(z)$, et b la *partie imaginaire*, notée $\mathrm{Im}(z)$.

Proposition 1
L'écriture algébrique d'un nombre complexe est unique.

Démonstration
Supposons $z=a+\mathrm{i}b=\alpha+\mathrm{i}\beta$ avec $(a,b,\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^4$.
Alors $(a-\alpha)=-\mathrm{i}(b-\beta)$. Si $b\neq\beta$, on aurait $\mathrm{i}\in\mathbb{R}$, contradiction. Ainsi $b=\beta$ et donc $a=\alpha$.

Définition 3
Un complexe z est *imaginaire pur* lorsque $\mathrm{Re}(z)=0$. L'ensemble correspondant est noté $\mathrm{i}\mathbb{R}$.

3 Opérations sur les nombres complexes

Soient $z=x+iy$ et $w=a+ib$ deux nombres complexes.

— Addition : $z+w=(x+a)+i(y+b)$
— Soustraction : $z-w=(x-a)+i(y-b)$
— Multiplication : $zw=(xa-yb)+i(xb+ya)$
— Division : si $w\neq 0$, alors

$$\frac{z}{w}=\frac{x+iy}{a+ib}=\frac{(x+iy)(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{xa+yb+i(ya-xb)}{a^2+b^2}$$

Propriété 1 Pour tous nombres complexes z, z' et z'', on a :
— Commutativité : $z+z'=z'+z$;
— Associativité : $(z+z')+z''=z+(z'+z'')=z+z'+z''$ et $(zz')\times z''=z\times(z'z'')$;
— Éléments neutres : $z+0=z$, $z+(-z)=0$ et $z\times 1=z$;
— Règle de calculs : $z\times(z'+z'')=zz'+zz''$ et $zz'=0\Leftrightarrow z=0$ ou $z'=0$.

Remarque : On dit que $\mathbb{C}$ est un corps commutatif.

Exercice 1
$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$, développer les expressions suivantes : $(a+ib)^2$; $(a-ib)^2$; $(a-ib)(a-ib)$.

4 Nombres complexes conjugués

Définition 4
Pour $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$, on définit son *conjugué* par : $\overline{z} \; = \; a - \mathrm{i}b.$.

Proposition 2
$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$,

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$;
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \, \overline{z}_2$;
3. $z_2 \neq 0 \implies \overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$;
4. $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

Exercice : Démontrer la proposition précédentes.

Remarque
On en déduit les identités

$$\mathrm{Re}(z) = \tfrac{1}{2}\,(z + \overline{z}), \qquad \mathrm{Im}(z) = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}\,(z - \overline{z}).$$

En particulier $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$ et $z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$.

Propriété 2

1. $\overline{\overline{z}} = z$;
2. $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$;
3. $z - \overline{z} = 2i \times \mathrm{Im}(z)$;
4. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$;
5. $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$;
6. $z \times \overline{z} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$;

Exercice : Démontrer les propriétés précédentes.

5 Racines carrées, équation du second degré ou plus

5.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Pour $z \in \mathbb{C}$, une **racine carrée** est un nombre complexe ω tel que $\omega^2 = z$.

Proposition 3
Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors z admet deux racines carrées, ω et $-\omega$.
Pour $z = a + ib$, cherchons $\omega = x + iy$ tel que :

$$(x+iy)^2 = a + ib \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

On ajoute $x^2 + y^2 = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. On obtient :

$$\begin{cases} 2x^2 = \sqrt{a^2+b^2} + a \\ 2y^2 = \sqrt{a^2+b^2} - a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Si $b \geq 0$, alors x et y sont de même signe :

$$\omega = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}+i\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\right)$$

Si $b \leq 0$:

$$\omega = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}-i\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\right)$$

Exemple

Les racines carrées de i sont $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

5.2 Équation du second degré

Proposition 4

L'équation $az^2+bz+c=0$ avec $a \neq 0$ et $a, b, c \in \mathbb{C}$ admet deux solutions :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}, \quad \text{où } \delta^2 = \Delta = b^2-4ac$$

Exemple

- $z^2+z+1=0$, $\Delta=-3$, $\delta = i\sqrt{3}$, donc $z = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.
- $z^2+z+\frac{1-i}{4}=0$, $\Delta = i$, $\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

Corollaire 1

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$:

- Si $\Delta > 0$, deux racines réelles.
- Si $\Delta = 0$, racine double réelle.
- Si $\Delta < 0$, deux racines complexes conjuguées.

5.3 Équations polynomiales à coefficients réels

5.3.1 Définitions

Définitions 5

- Soit un entier naturel n et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des réels. Une fonction polynôme à coefficients réels (ou polynôme) est une fonction souvent notée P définie sur $\mathbb{C}$ qui admet une unique écriture sous la forme :
$$P(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0$$
- Le polynôme nul est le polynôme P défini pour tout nombre complexe z par $P(z) = 0$.
- Si P n'est pas le polynôme nul, n est le degré de P.
- On appelle racine du polynôme P tout nombre complexe z_0 tel que $P(z_0) = 0$.

Exemples

1. $P_1(z) = 5$ est un polynôme constant de degré 0.
2. $P_2(z) = 5z^4 - 2z^2 + 1$ est un polynôme de degré 4.
3. $P_3(z) = 12z^7$ est un monôme de degré 7.

Remarque :

On admet qu'un polynôme est le polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.

5.3.2 Factorisation des polynômes

Définition 6
On dit qu'un polynôme P est factorisable (ou divisible) par $z-a$ s'il existe un polynôme Q tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$P(z) = (z-a)Q(z).$$

Exemple
$P(z) = 4z^2 - 25$ est factorisable par $2z-5$. En effet : $P(z) = (2z-5)(2z+5)$.

Propriété 3
Soit un complexe a et n un entier naturel. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^n - a^n$ est factorisable par $z-a$ et :

$$z^n - a^n = (z-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}$$

Preuve (exigible) Si $a = 0$, la propriété est évidente.
Supposons $a \neq 0$. Pour tout nombre complexe $q \neq 1$, on a : $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$
En remplaçant q par $\frac{z}{a}$, on obtient :

$$\left(\frac{z}{a}\right)^n - 1 = \left(\frac{z}{a} - 1\right)\left(1 + \frac{z}{a} + \left(\frac{z}{a}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z}{a}\right)^{n-1}\right)$$

En multipliant par a^n, on arrive à : $z^n - a^n = (z-a)\left(a^{n-1} + a^{n-2}z + \ldots + z^{n-1}\right)$

Propriété 4 Soit un complexe a. Un polynôme P est factorisable par $z-a$ ssi a est une racine de P.

Preuve (exigible) Si P est factorisable par $z-a$, il est immédiat que a est une racine de P.
Montrons la réciproque : Soit P un polynôme à coefficients réels de degré n. On peut écrire :

$$P(z) - P(a) = a_n(z^n - a^n) + a_{n-1}(z^{n-1} - a^{n-1}) + \ldots + a_1(z-a)$$

En utilisant la factorisation précédente, on montre que $P(z) - P(a)$ est divisible par $z-a$.
Si $P(a) = 0$, alors $P(z)$ est divisible par $z-a$.

5.3.3 Degré et racines

Théorème fondamental de l'algèbre [d'Alembert-Gauss] *(admis)*
Tout polynôme $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ de degré n à coefficients complexes admet n racines complexes (comptées avec leurs ordres de multiplicité).
Remarque : On dit que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Propriété 5 Un polynôme non nul P, de degré n, admet au plus n racines.

Preuve (exigible) Par récurrence sur n.

- **Initialisation :** Pour $n = 1$, l'équation $az + b = 0$ a une seule solution.
- **Hérédité :** Supposons la propriété vraie pour un polynôme de degré n. Si P est de degré $n+1$ et a une racine a, alors $P(z) = (z-a)Q(z)$ où Q est de degré n. Par hypothèse de récurrence, Q a au plus n racines, donc P a au plus $n+1$ racines.

Remarque Dans les complexes, un polynôme non nul P, de degré n, admet exactement n racines en tenant compte de l'ordre de multiplicité.

Fin de chapitre