Chapitre 7. Combinaisons

Boulanger Yann

22 août 2025

Table des matières

1 Combinaisons

1.1 Définition

Soit E un ensemble fini ayant n éléments et p un entier supérieur ou égal à 1.

Définition
Une **combinaison** de p éléments de E est une partie (ou un sous-ensemble) $\{a_1; a_2; \ldots; a_p\}$ constituée de p éléments pris parmi les n éléments de E.

Remarques

— Une combinaison étant une partie de E, tous ses éléments sont distincts et un élément de E intervient au plus une fois.

— Une combinaison est donc une partie non ordonnée et sans répétition de p éléments de E.

Exemple

— $\{M; T; A\}$ et $\{M; T; H\}$ sont deux combinaison de 3 éléments de Ω.

— $\{A\}$ est une combinaison d'un élément de Ω.

— $\{M; T; A\}$ et $\{M; A; T\}$ sont deux écritures de la même combinaison.

1.2 Combinaisons sans remise

Étant donné un ensemble E de n objets, on appelle combinaisons de p objets tout ensemble de p objets pris parmi les n objets sans remise.
Le nombre de combinaisons de p objets pris parmi n est noté : $\binom{n}{p}$

Remarque : On a nécessairement $1 \geq p \geq n$ et $n, p \in \mathbb{N}^*$. Si $n < p$, alors $\binom{n}{p} = 0$.

Exemples

— Le tirage au hasard de 5 cartes dans un jeu de 32 (main de poker) est une combinaison avec $p = 5$ et $n = 32$.

— La formation d'une délégation de 5 personnes parmi un groupe de 50 constitue une combinaison avec $p = 5$ et $n = 50$.

Pour ces deux exemples, les objets tirés sont clairement distincts.

Le nombre de combinaisons de p objets pris parmi n et sans remise est :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Voici pourquoi :

— Il y a A_n^p manières de tirer p objets parmi n en les ordonnant, soit $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

— Une fois les p objets tirés, il y a $p!$ manières de les ordonner.

— Il y a donc $\frac{A_n^p}{p!}$ manières de tirer p objets parmi n sans les ordonner.

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{1}{p!} \frac{n!}{(n-p)!}$$

Remarque
À la notation ancienne C_n^p, on préfère la notation moderne $\binom{n}{p}$. Les nombres n et p constituent les coefficients binomiaux.

Exemples
Dans le cadre de l'exemple de la séquence d'ADN, le nombre de dinucléotides attendus sans tenir compte de l'ordre des bases dans la séquence (hypothèse justifiée dans le cas de l'ADN non codant) est donc :

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

Ceci correspond aux 12 arrangements possibles sans répétitions ($A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$) divisés par le nombre de permutations possibles avec 2 nucléotides ($P_p = p!$).

1.3 Combinaisons avec remise

Le nombre de combinaisons de p objets parmi n avec remise est :

$$\binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}.$$

Voici pourquoi :
Soit la constitution de mots de 3 lettres à partir d'un alphabet à 5 lettres avec remise, on a 3 cas :

— $\binom{5}{3}$: nombre de mots de 3 lettres différentes et sans ordre ;

— $\binom{5}{2} \times 2$: nombre de mots de 2 lettres différentes et une lettre redondante ;

— $\binom{5}{1}$: nombre de mots de 3 lettres identiques.

D'où au total :

$$\binom{5}{3} + 2\binom{5}{2} + \binom{5}{1} = \binom{7}{3} = 35$$

en utilisant la formule des combinaisons composées ou formule de Pascal.
En effet, $\binom{5}{3} + \binom{5}{2} = \binom{6}{3}$ et $\binom{5}{2} + \binom{5}{1} = \binom{6}{2}$, d'où $\binom{7}{3} = 35$. Ainsi :

$$\binom{7}{3} = \binom{5+3-1}{3} = \binom{n+p-1}{p}$$

avec $n = 5$ et $p = 3$.

2 Propriétés des combinaisons

2.1 La symétrie

Le nombre de combinaisons de p objets pris parmi n étant $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, alors :

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ car $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!}$.
2. Si $n \geq 1$, alors $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, car $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!}$.
3. Si $n \geq 2$, alors $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Par récurrence, on déduit des relations précédentes la propriété de symétrie, à savoir :

$$\text{si } 0 \leq p \leq n, \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Il revient au même de donner la combinaison des p objets choisis ou bien celle des $(n-p)$ qui ne le sont pas.

2.2 Combinaisons composées ou Formule de Pascal

Si $0 \leq p \leq n-1$, alors :

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}.$$

Voici pourquoi :
Parmi les n objets, on considère un objet en particulier :

— Si cet objet fait partie des p objets tirés, il y a C_{n-1}^{p-1} possibilités de choisir les $p-1$ autres objets parmi les $n-1$ objets restants.

— Si, en revanche, l'objet ne fait pas partie du tirage, il y a $\binom{n-1}{p}$ possibilités de choisir les p autres objets parmi les $n-1$ objets restants.

D'où la relation :

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}.$$

Les termes du triangle de Pascal résultent de l'application directe de cette relation.

(n,p)	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

2.3 Formule du binôme de Newton

La formule du binôme de Newton correspond à la décomposition des différents termes de la puissance n-ième du binôme $(a+b)$.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}, \qquad (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p}\, b^p.$$

Élever $(a+b)$ à la puissance n revient à multiplier n binômes identiques $(a+b)$. Le résultat est une somme où chaque élément est le produit de n facteurs de type a ou b choisi chacun dans un binôme différent. Les termes sont ainsi de la forme $a^{n-p}b^p$. Chacun de ces termes est obtenu autant de fois qu'il existe de façons de choisir les p éléments b parmi les n, c'est-à-dire le nombre de combinaisons. Compte tenu de la symétrie des combinaisons $\binom{n}{p}$, la formule du binôme de Newton peut s'écrire aussi :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p}\, b^p = \sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q} a^q\, b^{n-q}, \quad \text{avec } q = n-p.$$

Les coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$ qui sont les coefficients de la formule du binôme de Newton figurent dans de nombreuses formules mathématiques, notamment pour le calcul des probabilités de la loi binomiale. Ces coefficients peuvent être obtenus facilement à l'aide du triangle de Pascal.

Exemple

Le développement de $(a+b)^6$ donne :

$$(a+b)^6 = \sum_{p=0}^{6} \binom{6}{p} a^{6-p} b^p.$$

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0}a^6 + \binom{6}{1}a^5b + \binom{6}{2}a^4b^2 + \binom{6}{3}a^3b^3 + \binom{6}{4}a^2b^4 + \binom{6}{5}ab^5 + \binom{6}{6}b^6.$$

L'application du triangle de Pascal (7$^{\text{e}}$ ligne) donne directement les valeurs des coefficients binomiaux :

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

Remarque

Si l'on pose $a = b = 1$, on obtient alors, d'après la formule du binôme de Newton :

$$2^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.$$

Or, $\binom{n}{p}$ étant le nombre de parties à p éléments de l'ensemble E contenant n objets, $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$ représente le nombre de parties ou partitions de l'ensemble E, que l'on note $\mathcal{P}(E)$. Si $|E| = n$, alors :

$$|\mathcal{P}(E)| = 2^n.$$

Le cardinal d'un ensemble (card) correspond au nombre d'éléments constituant cet ensemble.

Fin de chapitre