Chapitre 3. Limite d'une suite numérique. Exercices

Boulanger Yann

31 août 2025

Table des matières

1 Suites

1.1 Exercice 1

Déterminer dans chaque cas, le sens de variation de (u_n) :

1. $u_n = -\dfrac{1}{3}n + 4$
2. $u_n = 5n - \dfrac{3}{7}$
3. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n - u_{n+1} = \dfrac{13}{14} \end{cases}$
4. $u_n = 2n^2 + 3n + 1$

1.2 Exercice 2

Utiliser une suite auxiliaire.
Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$.

1. Conjecturer le sens de variation de (u_n).
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.
   a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique.
   b) En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
   c) Justifier le sens de variation de (u_n) conjecturé à la question 1).

1.3 Exercice 3

Dans cet exercice toutes les récurrences devront être faites sans considérer qu'elles sont évidentes ;
Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite de nombres réels définie par $u_0 \in [0, 1]$ et par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{(u_n)^2}{4}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1$.
3. Montrer que la suite est monotone.

2 Limite d'une suite

2.1 Exercice 4

Dans cet exercice les questions sont indépendantes.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}*}$ une suite telle que $u_n = -\frac{3}{n^2} + 1$.
   Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.
2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $v_n = -7n^3 + 10$.
   Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.
3. Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $w_n = \frac{3n^2}{7} - 100$.
   Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$.

2.2 Exercice 5

Dans chacun des cas, déterminer les limites des suites (u_n) en utilisant la méthode du terme dominant.

$$u_n = 2n^3 - 5n^2 - 1 \qquad u_n = \frac{3n^2 + 8n + 1}{2n^2 + 9} \qquad u_n = \left(n + \frac{2}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$$

$$u_n = \frac{\sqrt{3n+1}}{3 + \sqrt{n}} \qquad u_n = \frac{3}{2\sqrt{n} + 17} \qquad u_n = \frac{\sqrt{n^2 + n + 2}}{\sqrt{n^2 - n - 1}}$$

2.3 Exercice 6

Déterminer les limites des suites suivantes lorsqu'elles existent.
Pour tout entier n :

1. $u_n = \sqrt{n^2 - n + 1} - \sqrt{n^2 + n + 1}$
2. $u_n = n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)$

3 Seuil

3.1 Exercice 7

Une observation faite sur la fréquentation d'un stade de football a permis de constater, pour chaque année, un taux de réabonnement de 80 % ainsi que l'apparition de 4000 nouveaux abonnés. La politique du club fait que seuls les abonnés peuvent assister aux rencontres de l'équipe première. On note a_n le nombre d'abonnés à la fin de l'année 2020 + n et on précise que $a_0 = 7000$ pour l'année 2020.

1. Calculer le nombre d'abonnés en 2025 puis en 2026.
2. Expliquer pourquoi $\forall n \in \mathbb{N}\, a_{n+1} = 0,8a_n + 4000$.
3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}\, u_n = 20\,000 - a_n$.
   Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et u_0.
4. Donner la formule explicite de (u_n) puis de (a_n).
5. Le club envisage la construction d'un nouveau stade. Quelle capacité faut-il envisager ?
6. Actuellement, la capacité du stade est de 18 500 places.
   En complétant le programme python ci-dessous, déterminer en quelle année le stade ne pourra plus accueillir l'ensemble des abonnés.

```
N = ......
A = .........
while .........
...= .........
...= .........
print(...........)
```

Fin de chapitre