Chapitre 1. Récurrence - Dénombrement. Exercices

Boulanger Yann

30 août 2025

Table des matières

1 Récurrence

1.1 Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 3, \quad u_{n+1} = 2u_n - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 1$.

1.2 Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

1.3 Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4$.

1.4 Exercice 4 - Inégalité de Bernouilli

Montrer que :

$$\forall x \geq -1,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 + nx \ \leq \ (1+x)^n$$

1.5 Exercice 5

Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

1.6 Exercice 6

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$
3. Que peut-on en déduire ?

1.7 Exercice 7

On note $n!$ le produit des n premiers entiers non nul.
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2^{n-1} \leq n!$$

2 Dénombrement

2.1 Produit Cartésien

2.1.1 Exercice 1

Soient l'ensemble $E = \{a; b; c; d; e; f; g; h\}$ et les parties $A = \{a; b; e; f\}$ et $B = \{a; c; d; f; h\}$ de E.

1. Déterminer $A \cap B, A \cup B, \overline{A}, \overline{B}, \overline{A \cup B}, \overline{A} \cap B, \overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$.
2. Déterminer le cardinal de E, de A, de B, de $A \cap B$ et de $A \cup B$.
3. Déterminer le nombre de parties de E.
4. Déterminer le nombre de parties de B et les écrire toutes.

2.1.2 Exercice 2

Dans un groupe de 40 personnes, 8 parlent russe, 15 parlent anglais et 9 parlent allemand.
De plus, parmi elles, 4 parlent anglais et allemand, 5 parlent anglais et russe, 2 parlent allemand et russe et 2 parlent les 3 langues.

1. Représenter la situation par un diagramme de Venn.
2. Déterminer le nombre de personnes ne parlant ni russe, ni anglais, ni allemand.

2.1.3 Exercice 3

Lors d'une enquête de satisfaction sur un produit, 18 personnes ont répondu aux questions suivantes :
- Avez-vous aimé le produit que vous avez testé ?
- L'achèteriez-vous ?
Dix personnes ont répondu « oui » à la première question, treize personnes ont répondu « non » à la seconde question et huit personnes ont répondu « non » aux deux questions.

1. Représenter la situation par un tableau.
2. Combien de personnes ont répondu « oui » aux deux questions ?

2.1.4 Exercice 4

À l'aide d'un arbre, déterminer tous les anagrammes de « OUI » possibles. Combien y en a-t-il ?

2.1.5 Exercice 5

Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 3 entrées, 2 plats et 4 desserts ?

2.1.6 Exercice 6

Une femme a dans sa garde-robe 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes.
Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste.
De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

2.1.7 Exercice 7

Deux équipes de hockeys de 12 et 15 joueurs échangent une poignée de main à la fin d'un match : chaque joueur d'une équipe serre la main de chaque joueur de l'autre équipe.
Combien de poignées de main ont été échangées ?

2.2 k-uplets

2.2.1 Exercice 8

Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions.
Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles.
De combien de façons peut-on répondre à ce questionnaire ?

2.2.2 Exercice 9

Raymond Queneau a écrit un ouvrage intitulé *Cent mille milliards de poèmes*. Il est composé de 10 pages contenant chacune 14 vers. Le lecteur peut composer son propre poème de 14 vers en prenant le premier vers de l'une des 10 pages puis le deuxième vers de l'une des 10 pages et ainsi de suite jusqu'au quatorzième vers. Justifier le titre de l'ouvrage.

2.2.3 Exercice 10

En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères.
Un bit (binary digit : chiffre binaire) est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1.
Avec 8 chiffres binaires (un octet), combien de caractères peut-on coder ?

2.2.4 Exercice 11

Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ?
Combien peut-on former de numéros de téléphone à 8 chiffres ne comportant pas le chiffre 0 ?

2.3 Arrangements

2.3.1 Exercice 12

À l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze.
Combien y-a-t-il de distributions possibles (avant la compétition, bien sûr...) ?

2.3.2 Exercice 13

Un groupe d'élèves de terminale constitue le bureau de l'association " Bal des Terms : le succès ".
Ce bureau est composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier.
Combien y a-t-il de bureaux possibles ? (il y a 24 élèves dans la classe)

2.3.3 Exercice 14

Six personnes choisissent mentalement un nombre entier compris entre 1 et 6.

1. Combien de résultats peut-on obtenir ?
2. Combien de résultats ne comportant pas deux fois le même nombre peut-on obtenir ?

2.3.4 Exercice 15

Soit A l'ensemble des nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul.

1. Calculer le nombre d'éléments de A.
2. Dénombrer les éléments de A :
   (a) composés de quatre chiffres distincts

(b) composés d'au moins deux chiffres identiques

(c) composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7

2.3.5 Exercice 16

Un clavier de 9 touches permet de composer le code d'entrée d'un immeuble, à l'aide d'une lettre suivie d'un nombre de 3 chiffres distincts ou non.

1. Combien de codes différents peut-on former ?
2. Combien y a-t-il de codes sans le chiffre 1 ?
3. Combien y a-t-il de codes comportant au moins une fois le chiffre 1 ?
4. Combien y a-t-il de codes comportant des chiffres distincts ?
5. Combien y a-t-il de codes comportant au moins deux chiffres identiques ?

2.4 Permutations et anagrammes

2.4.1 Exercice 17

Le groupe des élèves de Terminale doit s'inscrire au concours par Minitel.
Il faut établir une liste de passage.
Combien y a-t-il de manières de constituer cette liste ? (il y a 24 élèves dans la classe)

2.4.2 Exercice 18

Les nombres 5, -1 et 3 constituent la solution d'un système de trois équations à trois inconnues.
Donner tous les triplets différents qui peuvent être la solution de ce système.

2.4.3 Exercice 19

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot MATH ?

2.4.4 Exercice 20

1. Dénombrer les anagrammes du mot PATRICE.
2. Dans chacun des cas suivants, dénombrer les anagrammes du mot PATRICE :
   (a) commençant et finissant par une consonne ;
   (b) commençant et finissant par une voyelle ;
   (c) commençant par une consonne et finissant par une voyelle ;
   (d) commençant par une voyelle et finissant par une consonne.

2.4.5 Exercice 21

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot TABLEAU ?

2.4.6 Exercice 22

1. Combien peut-on réaliser de mots de n lettres comportant k lettres se répétant $p_1, p_2, \dots, p_k$ fois ?
2. Quel est le nombre d'anagrammes du mot « ANAGRAMME » ?

2.4.7 Exercice 23

Dénombrer toutes les anagrammes possibles du mot PRISÉE

1. En tenant compte de l'accent.
2. En ne tenant pas compte de l'accent sur le « e ».

Fin de chapitre