TRANSFORMATIONS – PARTIE 2

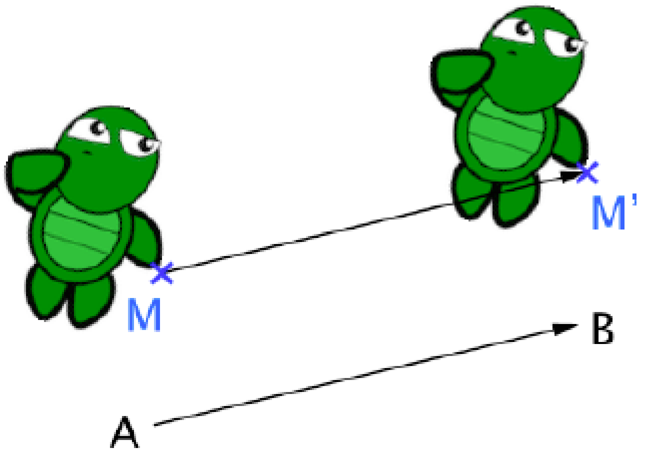
Objectif du chapitre :

⇒ Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques : agrandissements, réductions, rotations, translations.

I) Transformations dans le plan

1) Translation

M- est l’image de M par la translation qui envoie A en B signifie que :
ABM’M est un parallélogramme.

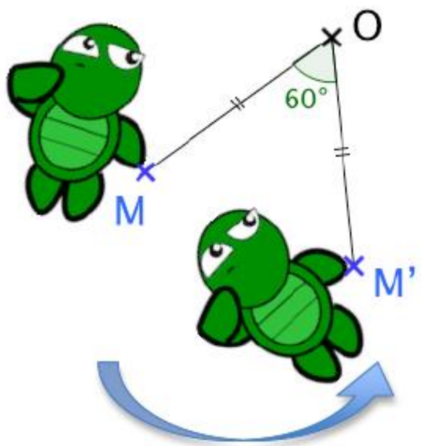


Définition
Une translation fait glisser une figure dans une direction, un sens et une longueur donnée.

2) Rotation

M’ est l’image de M par la rotation de centre O et d’angle 60° dans le sens des aiguilles d’une montre signifie que :

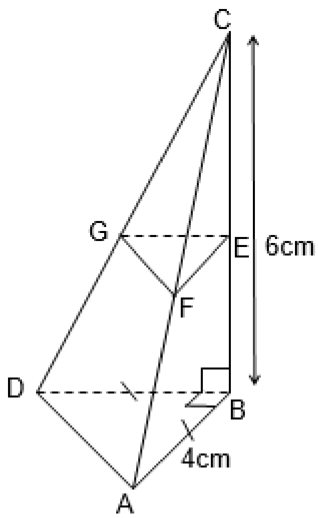
- $\widehat{MOM'} = 60°$ de M vers M’ dans le sens de la flèche,
- $MO = OM'$.



Définition
Une rotation fait tourner une figure autour d’un point selon l’angle.

II) Agrandissement et réduction

1) Exemple d'introduction : Une pyramide réduite



Les faces CBA et CBD de la pyramide sont des triangles rectangles en B et
la base DBA est un triangle rectangle et isocèle en B.
CB = 6 cm et AB = 4 cm.

1) Calculer :
   L'aire du triangle DBA ;
   Le volume de la pyramide CDAB.

2) On coupe la pyramide par un plan parallèle à la base passant par le point E tel que CE = 3 cm.

   La pyramide CGFE est une réduction de la pyramide CDAB.

   Calculer:
   Le coefficient de réduction ;
   L'aire du triangle GEF ;
   Le volume de la pyramide CGFE.

Solution

1) L'aire du triangle DBA

   $A_{DBA} = base \times hauteur \div 2 = 4 \times 4 \div 2 = 8\ cm^2$
   L'aire du triangle DBA est de 8 cm^2.

   Le volume de la pyramide CADB

   $V_{CABD} = A_{DBA} \times hauteur \div 3 = 8 \times 6 \div 3 = 16\ cm^3$
   Le volume de la pyramide CABD est de 16 cm^3.

2) Coefficient de réduction

   $\frac{CE}{CB} = \frac{3}{6} = 0{,}5$

   0,5 est le coefficient de réduction. Les longueurs sont multipliées par 0,5.

   L'aire du triangle GFE.

   $EF = GE = 0{,}5 \times 4 = 2\ cm$
   $A_{GEF} = base \times hauteur \div 2 = 2 \times 2 \div 2 = 2\ cm^2$

   Le triangle GEF est une réduction du triangle ABD.

$$A_{GEF} = 0{,}25 \times A_{ABD}$$
$$A_{GEF} = (0{,}5)^2 \times A_{ABD}$$

   Les aires sont multipliées par $(0{,}5)^2$.

Le volume de la pyramide CEFG

$V_{CEFG} = A_{GEF} \times hauteur \div 3 = 2 \times 3 \div 3 = 2\ cm^3$

La pyramide CEFG est une réduction de la pyramide CABD.

$$V_{CEFG} = 0{,}125 \times V_{CABD}$$
$$V_{CEFG} = (0{,}5)^3 \times V_{CABD}$$

Les volumes sont multipliés par $(0{,}5)^3$.

Propriétés

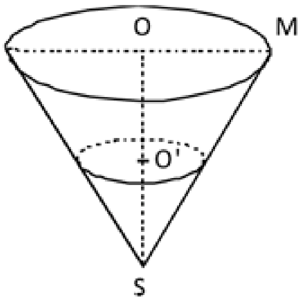
Pour un agrandissement ou une réduction de rapport k :

- Les longueurs sont multipliées par k ;
- Les aires sont multipliées par k^2 ;
- Les volumes sont multipliés par k^3.

Remarque : Dans la pratique, on applique directement la propriété.

2) Application

Exemple



Le récipient représenté ci-contre a une forme conique et a pour dimensions : OM = 6 cm et SO = 12 cm.

1) Calculer, en cm^3, le volume de ce récipient.
   Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième de cm^3.

2) On remplit d'eau le récipient jusqu'au point O' tel que SO' = 4,5 cm.
   Le cône formé par l'eau est une réduction du cône initial.
   Calculer le coefficient de réduction.

3) Déduire une valeur approchée du volume d'eau.

Solutions

1) Aire de la base du récipient :
   Il s'agit d'un disque de rayon OM = 6 cm, donc : $A = \pi \times R^2 = \pi \times 6^2 = 36\pi$.

   Volume du récipient :
   Il s'agit d'un cône de hauteur SO = 12 cm, donc :
   $$V = \frac{aire\ de\ la\ base \times hauteur}{3} = \frac{36\pi \times 12}{3} = 144\pi\ cm^3 \approx 452{,}5 cm^3.$$

2) Coefficient de réduction :
   Le coefficient de réduction est le rapport de deux longueurs qui se correspondent sur les deux solides. On prend ici les hauteurs SO et SO' des deux solides.
   $k = \frac{SO'}{SO} = \frac{4{,}5}{12} = 0{,}375.$

3) Pour une réduction de rapport $k = 0{,}375$, les volumes sont multipliés par $k^3 = 0{,}375^3$.
   Ainsi, le volume du petit cône correspondant à l'eau dans le récipient est égal
   $V' \approx 452{,}4 \times 0{,}375^3 \approx 23{,}9 cm^3$.