Chapitre 12 – APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

1) PRODUIT SCALAIRE ET NORME

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$ $\quad$ $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$

Démonstrations :

Formule 1 :

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$$
$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$
$$2\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2$$

Donc :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$$

Formule 2 :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$$
$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$
$$2\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}+\vec{v}\|^2$$

Donc :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Formule 3 :

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 - (\vec{u}-\vec{v})^2$$
$$= \big((\vec{u}+\vec{v}) + (\vec{u}-\vec{v})\big)\big((\vec{u}+\vec{v}) - (\vec{u}-\vec{v})\big)$$
$$= (2\vec{u})(2\vec{v})$$
$$= 4\vec{u}.\vec{v}$$

Donc :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2).$$

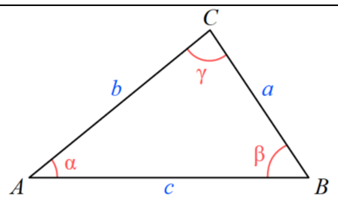
Conséquence : avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, on obtient : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$

2) THÉORÈME D'AL-KASHI

Ce théorème porte le nom persan du début du XVe siècle Ghiyath ad-Din Jamshid Mas`ud al-Kashi (env. 1380 – 1430)), mathématicien de l'école Sarmacande, qu'il énonça dans son œuvre « *Miftah al-hisab* » (« Les clés de l'arithmétique »).
Le théorème a été popularisé en occident par François Viète au XVIe siècle. Le théorème est également connu sous le nom de loi des cosinus.

Vidéo : https://www.youtube.com/embed/mEHMfiW4tdM?vq

Soit un triangle ABC, dans lequel on utilise les notations usuelles exposées sur la figure ci-contre. Alors les égalités suivantes sont vérifiées :



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$

Démonstration

$c^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2$ d'après la relation de Chasles

$$c^2 = \|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\|^2 = \|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\|^2$$
$$= \|\overrightarrow{CB}\|^2 - 2\times\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} + \|\overrightarrow{CA}\|^2$$
$$= CB^2 - 2\times CB\times CA\times\cos(\widehat{ACB}) + CA^2$$
$$= a^2 - 2ab\cos(\gamma) + b^2$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

De même, obtient : a^2 et b^2

Remarque : Si $\gamma = \frac{\pi}{2}$ où ABC est rectangle en C

alors $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = a^2 + b^2 - 2ab\times 0 = a^2 + b^2$,

nous retrouvons alors l'égalité du théorème de Pythagore.

Exemple : **Soit un triangle ABC tel que $AB = 8$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 55°$.**
Calculer une valeur approchée de BC à 10^{-2} près.

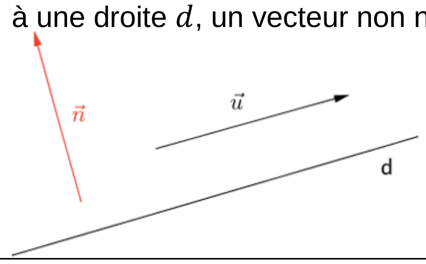
On pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, alors :
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{BAC}$
$\quad = 3^2 + 8^2 - 2 \times 3 \times 8 \times \cos 55 \approx 45{,}468$
Donc $a \approx \sqrt{45{,}468} \approx 6{,}74$.

3) ÉQUATION DE DROITE

Définition

Soit d une droite du plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

On appelle **vecteur normal** $\vec{n}$ à une droite d, un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur $\vec{u}$ de d.



Exemple : **Soit d la droite d'équation cartésienne $2x - 3y - 6 = 0$. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ est-il un vecteur normal à cette droite d ?**

Un vecteur directeur de d est $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

Calculons : $\vec{u}.\vec{n} = xx' + yy' = 3 \times (-2) + 2 \times 3 = -6 + 6 = 0$.

Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, donc le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de d.

Propriétés

Une droite de vecteur normal $\vec{n}(a; b)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.

Réciproquement, la droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

Démonstrations :

Pour la propriété directe : Soit un point $A(x_A; y_A)$ de la droite d.
$M(x; y)$ est un point de d si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$
$\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$
$\Leftrightarrow ax + by - ax_A - by_A = 0$, en posant $c = -ax_A - by_A$ on obtient alors $ax + by + c = 0$.

Pour la réciproque : Si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de d alors $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de d.
Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ vérifie : $-b \times a + a \times b = 0$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

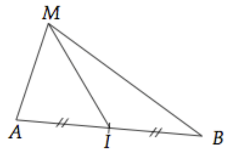
Exemple (précédent) : **Soit d la droite d'équation cartésienne $2x - 3y - 6 = 0$.**
On lit : $a = 2$ et $b = -3$ alors le vecteur $\vec{n}_1\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à cette droite d. De plus, $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ colinéaire à $\vec{n}_1$ est un autre vecteur normal à la droite d.

4) ÉQUATION DE CERCLE

Théorème de la médiane

A, B, M sont trois points. Notons I le milieu de $[AB]$.

Alors : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.



Démonstration

On a d'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$.

D'où $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)$

$= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$

$= MI^2 + \overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}\right) + IA \times IB \times \cos \widehat{AIB}$

$= MI^2 + \overrightarrow{MI}.\vec{0} + \frac{AB}{2} \times \frac{AB}{2} \times \cos \pi$

$= MI^2 + 0 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \times (-1)$

On a donc : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$.

Théorème

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le **cercle de diamètre** $[\boldsymbol{AB}]$.

Démonstration

On a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 0$ d'après le précédent théorème.

$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{2}$ Donc M appartient au cercle de centre I et de rayon $\frac{AB}{2}$, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AB]$.

Exemple : Déterminer l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1;-2)$ et $B(3;4)$

$M(x;y)$ appartient au cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1;-2)$ et $B(3;4)$ si et seulement si

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) + (y+2)(y-4) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 3x + 3 + y^2 - 4y + 2y - 8 = 0$

Donc une équation du cercle est : $x^2 - 4x + y^2 - 2y - 5 = 0$

Équation de cercle

On appelle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ le cercle de centre $\Omega(x_\Omega; y_\Omega)$ et de rayon r.

$M(x;y) \in \mathcal{C}(\Omega, r) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega\mathrm{M}^2 = \mathrm{r}^2 \\ (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2 \end{cases}$

Exemple : Déterminer une équation du cercle de centre $\boldsymbol{\Omega(-1;5)}$ et de rayon $\mathbf{r} = \mathbf{3}$

L'équation du cercle est : $\left(x - (-1)\right)^2 + (y-5)^2 = 3^2$ donc $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 9$