Chapitre 14 – VARIATIONS DE SUITE

A visionner : https://www.youtube.com/embed/i7cUihJ3AWE

1. SENS DE VARAIATION D'UNE SUITE

a) Définitions :

On dit qu'une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est :

- **croissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \geq u_n$
- **décroissante** si et seulement si, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \leq u_n$
- **constante** si et seulement si, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n$

Remarques :

- Pour certaines suites, l'inégalité $u_{n+1} \geq u_n$ n'est vraie que pour tout n tel que $n \geq p$: on dit que (u_n) est croissante à partir du rang p.
- Lorsqu'une suite est croissante ou décroissante, on dit qu'elle est monotone.

b) Trois méthodes envisageables pour étudier le sens de variation d'une suite :

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{n}$

1ère méthode : Etudier le signe de la différence $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$

Pour tout $n \neq 0$,

$$\boldsymbol{u_{n+1} - u_n} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{n-n-1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)}.$$

Comme n > 0 et n+1 > 0 alors $n(n+1) > 0$

Alors $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n < 0}$

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

2ème Méthode : Si tous les termes de la suite sont strictement positifs

On compare le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

Puisque $u_n > 0$ pour tout entier $n \neq 0$, on peut calculer :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{n} = \frac{n}{n+1}$$

Or n < n+1, Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

Donc $u_{n+1} < u_n$

Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

3ème Méthode : Si La suite est définie explicitement, **on étudie le sens de variation de la fonction f telle que $\boldsymbol{u_n = f(n)}$.**

$f : x \rightarrow \frac{1}{x}$ est une fonction strictement décroissante sur]0 ;+ ∞[.

On en déduit que la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ est donc strictement décroissante sur $\mathbb{N}$

c) Cas particuliers : Suites arithmétiques et suites géométriques

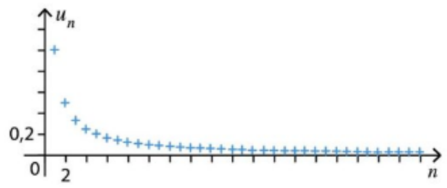
Suites Arithmétiques	Suites Géométriques
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $\boldsymbol{r}$. • Si $\boldsymbol{r > 0}$, alors la suite est strictement croissante • Si $\boldsymbol{r < 0}$, alors la suite est strictement décroissante • Si $\boldsymbol{r = 0}$, alors la suite est constante	Soit (v_n) une suite géométrique de raison $\boldsymbol{q}$ dont tous les termes sont strictement positifs : • Si $\boldsymbol{q > 1}$, alors la suite est croissante. • Si $\boldsymbol{0 < q < 1}$, alors la suite est décroissante. • Si $\boldsymbol{q = 1}$ alors la suite est constante.
<u>Démonstration :</u> Pour tout n ∈ ℕ $\quad u_{n+1} = u_n + r$ $u_{n+1} - u_n = r$ Donc le signe de $u_{n+1} - u_n$ est celui de r.	<u>Démonstration :</u> (v_n) est une suite définie sur ℕ par $v_n = q^n$ avec $q \neq 0$ Alors $v_{n+1} = q^{n+1} = q \times q^n = qv_n$. • Si $\boldsymbol{q > 1}$ **:** comme $v_n < 0$, alors $\boldsymbol{q}v_n > \boldsymbol{1}v_n$ et donc $v_{n+1} \geq v_n$. On en déduite que la suite (v_n) est croissante. • Si $\boldsymbol{0 < q < 1}$ **,** on a $\boldsymbol{0 < q}v_n < \boldsymbol{1}v_n$, alors $v_{n+1} \leq v_n$. On en déduite que la suite (v_n) est décroissante. • Si $\boldsymbol{q = 1}$ **,** on a $\boldsymbol{q}v_n = \boldsymbol{1}v_n$, alors $v_{n+1} = v_n$. <u>Remarque :</u> Si $\boldsymbol{q < 0}$, la suite n'est pas monotone. Elle alterne entre une valeur positive et une valeur négative. Par exemple, $v_n = (-2)^n$ définie sur ℕ
<u>Application :</u> Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie sur ℕ par $u_n = 5n - 4$. Pour tout *n* ∈ ℕ, $u_{n+1} - u_n = 5(n+1) - 4 - 5n + 4 = 5$. (u_n) est une donc une suite arithmétique de raison q= 5. Comme $\boldsymbol{r > 0}$**,** la suite (u_n) est strictement croissante.	<u>Application :</u> Etudier le sens de variation de la suite (v_n) définie sur ℕ par $v_n = 0{,}5^n$ Pour tout *n* ∈ ℕ, $v_{n+1} = 0{,}5^{n+1} = 0{,}5 \times 0{,}5^n = 0{,}5v_n$. (v_n) est une donc une suite géométrique de raison q= 0,5. Pour tout *n* ∈ ℕ, $v_n > 0$. Comme $\boldsymbol{0 < q < 1}$, la suite (v_n) est strictement décroissante.

2. NOTION INTUITIVE DE LIMITE D'UNE SUITE.

On veut observer le comportement des termes u_n d'une suite lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes. On dit aussi « quand n tend vers $+\infty$ ».

a) Limite finie d'une suite

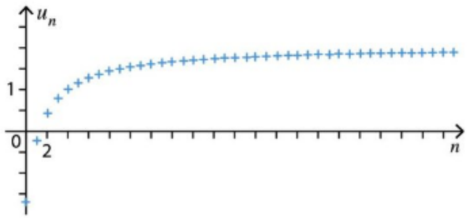
(u_n) est définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$,
pour tout entier $n \geqslant 1$.



n	100	1 000	100 000
u_n	0,01	0,001	0,000 01

Les termes u_n semblent se rapprocher autant que l'on veut d'une valeur « limite » : 0.
On dit que la suite (u_n) tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(v_n) est définie par $v_n = \dfrac{4n-5}{2n+3}$,
pour tout entier naturel n.

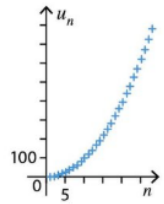


n	100	1 000	100 000
v_n	1,945 8	1,994 5	1,999 9

Les termes u_n semblent se rapprocher autant que l'on veut d'une valeur « limite » : 2.
On dit que la suite (v_n) tend vers 2 lorsque n tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$.

b) Limite infinie d'une suite

(u_n) est définie par $u_n = n^2$
pour tout entier naturel n.



Les termes de la suite semblent devenir aussi grands que l'on veut.
On dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

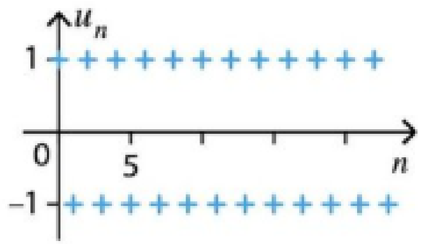
(w_n) est la suite arithmétique
de premier terme 16 et de raison -2.

	A	B
1	n	w_n
2	0	16
3	10	-4
4	100	-184
5	10000	-19984

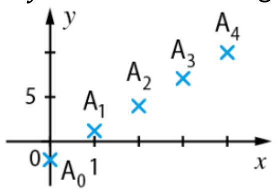
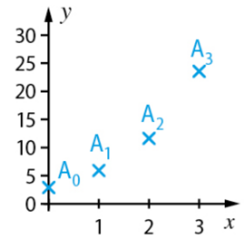
Les termes de la suite semblent devenir aussi grands que l'on veut en valeur absolue tout en étant négatifs.
On dit que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$.

c) Suite sans limite

Il existe des suites qui n'ont pas de limite, comme la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$.
Les termes alternent les valeurs 1 et (-1).



d) Exemples d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique

Suites Arithmétiques	Suites Géométriques
Soit (u_n) la suite arithmétique de 1er terme $u_0 = -2$ et de raison3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -2 + 3n$. Les points $A_n(n\ ;\ u_n)$ étant situés sur la droite d'équation $y = 3x - 2$ sont alignés.  Ici $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ Remarque : Pour une suite arithmétique, on parle de **croissance linéaire ou décroissance linéaire.**	Soit (v_n) la suite géométrique de 1er terme $v_0 = 3$ et de raison2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3 \times 2^n$. <table><tr><td>n</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>u_n</td><td>3</td><td>6</td><td>12</td><td>24</td><td>48</td><td>96</td><td>192</td></tr></table>  Remarque : Pour une suite géométrique, on parle de **croissance exponentielle**.