Chapitre 13 – FONCTION EXPONENTIELLE

A visualiser en introduction https://youtu.be/yZlsQP5jxZE

1) DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES

a. La fonction exponentielle

Propriété et définition (admises)

Il existe une, et une seule, fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

Pour tout réel x , $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** et notée $exp: x \longmapsto \exp(x)$

On note alors : $exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$

b. Propriétés algébriques

Théorème (relation fonctionnelle)

Pour tous x et y réels, $\mathbf{exp(x+y) = exp(x) \times exp(y)}$.

Preuve : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ car $\exp(x)$ ne s'annule pas

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et comme g est de la forme d'un quotient :

$g'(x) = \frac{exp'(x+y)\times\exp(x)-\exp(x+y)\times exp'(x)}{(\exp(x))^2}$

or $exp'(x+y) = \exp(x+y)$ et $exp'(x) = \exp(x)$

$g'(x) = \frac{exp(x+y)\times\exp(x)-\exp(x+y)\times exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$

La fonction g a pour dérivée la fonction nulle, g est donc constante sur $\mathbb{R}$.

De plus : $g(0) = \frac{\exp(0+y)}{\exp(0)} = \exp(y)$ car $\exp(0) = 1$

Alors pour tout réel x, $g(x) = \exp(y) \Leftrightarrow \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$

Donc : $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

Propriété

Pour tous x et y réels : $\mathbf{exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}}$ et $\mathbf{exp(x-y) = \frac{exp(x)}{exp(y)}}$

Preuves :

- $\exp(-x)\times\exp(x) = \exp(-x+x) = \exp(0) = 1 \Leftrightarrow \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ avec **$\exp(x)$ ne s'annule pas**
- $\exp(x-y) = \exp\big(x+(-y)\big) = \exp(x)\times\exp(-y) = \exp(x)\times\frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

c. Lien avec les suites géométriques

Propriété (admis)

Soit a un réel et (u_n) la suite de terme général $\exp(na)$ où n est un entier naturel.

- La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $\exp(a)$.
- Pour tout entier n et tout réel a : $\boldsymbol{\exp(na) = (\exp(a))^n}$

En effet : Soit $u_n = \exp(na) = \exp(a + a + \cdots + a) = \exp(a) \times \exp(a) \times \ldots \times \exp(a) = (\exp(a))^n$

$u_n = 1 \times q^n$ avec $q = \exp(a)$

d. Notation e^x

En 1728, EULER utilise pour la première fois la notation e pour l'image de 1 par la fonction exponentielle : $\boxed{\exp(1) = \mathrm{e}}$. Ce nombre **e est voisin de 2,718.**

Les propriétés démontrées précédemment permettent d'écrire : en prenant $a = 1$

$\exp(\mathrm{n}) = \exp(\mathrm{n} \times 1) = (\exp(1))^{\mathrm{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{n}}$ pour n entier.

On admet que **pour x réel, $exp(x) = e^x$.**

De ce fait, les propriétés précédentes déjà démontrées s'écrivent :

$\boldsymbol{e^0 = 1}$ et Pour tous réels x et y et n entier :

$\boldsymbol{e^{x+y} = e^x \times e^y}$; $\boldsymbol{e^{-x} = \frac{1}{e^x}}$; $\boldsymbol{e^{x-y} = \frac{e^a}{e^b}}$; $\boldsymbol{e^{nx} = (e^x)^n}$.

Exemples : $\exp(3) \times \exp(7) = \exp(3 + 7) = \exp(10)$ peut donc s'écrire $e^3 \times e^7 = e^{3+7} = e^{10}$

$(e^{3,4})^2 = e^{3,4\times 2} = e^{6,8}$

Simplifier : $\frac{(e^7)^4 \times e^3}{e^4} = \frac{e^{7\times 4} \times e^3}{e^4} = \frac{e^{28} \times e^3}{e^4} = e^{28+3-4} = e^{27}$

2) ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENETIELLE

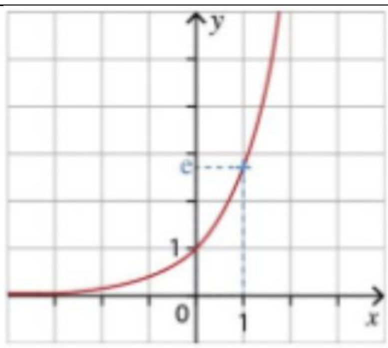
a. Signe et variation

Propriétés :

i) La fonction exponentielle $x \longmapsto e^x$ est **strictement positive.**

ii) La fonction exponentielle est **dérivable sur $\mathbb{R}$** et **sa dérivée est égale à elle-même.** On a : $(e^x)' = e^x$

iii) La fonction exponentielle est **strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**



Preuves *:* i) pour tout réel x : $e^x = e^{2\times\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ or un carré est toujours positif alors : $e^x \geq 0$

De plus on sait que $\mathbf{exp}(\boldsymbol{x})$ **ne s'annule pas** alors on a : $e^x > 0$

ii) Par définition de la fonction exponentielle : $exp'(x) = \exp(x)$. On note : $(e^x)' = e^x$

iii) On a pour tout réel x : $(e^x)' = e^x$

or $e^x > 0$ donc la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	$\nearrow$	1	$\nearrow$

b. Résolutions d'équations et inéquations

Propriétés

Pour tous réels a et b , on a : $\boldsymbol{e^a = e^b \Leftrightarrow a = b}$ et $\boldsymbol{e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b}$

En effet, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemples : Résoudre dans $\mathbb{R}$

$e^{3x-1} = e^{x+2} \Leftrightarrow 3x - 1 = x + 2$

$\Leftrightarrow 3x - x = 1 + 2$

$\Leftrightarrow 2x = 3$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$e^{2x+1} = -5$

Un exponentiel est strictement positif alors cette équation n'admet pas de solution.

$e^{2x+1} \leq 1 \Leftrightarrow e^{2x+1} \leq e^0$

$\Leftrightarrow 2x + 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow 2x \leq -1$

$\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$

c. Dérivée de la fonction $x \longmapsto exp(ax + b)$

Propriétés

Soient a et b deux réels.

La fonction $x \longmapsto \boldsymbol{e^{ax+b}}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et pour tout réel x : $\left(\boldsymbol{e^{ax+b}}\right)' = ae^{ax+b}$

Preuves *:* d'après le Chapitre 11, $\exp(ax + b)$ est la composée de la forme $g(ax + b)$ avec

$g(x) = \exp(x)$ fonction exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$.

On sait que : $(g(ax + b))' = a \times g'(ax + b)$ or $g'(x) = \exp'(x) = \exp(x) = g(x)$

Alors : $(g(ax + b))' = a \times g(ax + b)$

Donc $\left(e^{ax+b}\right)' = a \times e^{ax+b}$

Exemples : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{2x+1}$. Étudier le sens de variation de f.

$f'(x) = 2e^{2x+1}$

Pour tout réel x : $e^{2x+1} > 0$ et $2 > 0$ par produit : $2e^{2x+1} > 0$

D'où : $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.