Chapitre 13 – VARIABLES ALÉATOIRES

A Visionner en introduction : https://www.youtube.com/embed/nRCaPsE35mg?vq

1) VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES SUR UN ENSEMBLE FINI

a. Modélisation du résultat d'une expérience aléatoire

Exemple :
Un joueur lance un dé cubique équilibré.
Si le numéro obtenu est 1, 2, 3 ou 4, il perd 5 €.
Si le numéro obtenu est 5, il gagne 7 €.
Sinon, il gagne 10 €.

Résultat du dé	1	2	3	4	5	6
Valeur du gain	-5	-5	-5	-5	7	10

On peut considérer le « gain algébrique » du joueur : Ce gain est égal soit à -5, soit à 7, soit à 10.
Ce gain est donc une variable qui peut prendre 3 valeurs selon le résultat de l'expérience aléatoire.
On peut modéliser un univers composé des 6 issues du résultat du dé, puis associer à chaque issue une valeur du gain.

b. Variable aléatoire

Définition :
On considère une expérience aléatoire dont l'univers est un ensemble fini noté Ω.
Une **variable aléatoire X** est une **fonction de Ω dans $\mathbb{R}$** qui a chaque issue de Ω associe un nombre réel.

Exemple :
On considère le jeu précédent et on note X le gain algébrique du joueur.
X est une variable aléatoire définie sur Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}, et qui peut prendre les valeurs -5, 7 et 10.
Lorsque le résultat du dé est 1,2,3 ou 4, X prend la valeur -5. On note cet événement {X = -5}
Lorsque le résultat du dé est 5, X prend la valeur 7. On note cet événement {X = 7}.
Lorsque le résultat du dé est 6, X prend la valeur 10. On note cet événement {X = 10}.

Remarque : L'événement {X <0} est réalisé lorsque X = -5.

c. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition :
Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω et prenant les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$.
Donner la **loi de probabilité** d'une variable aléatoire X, c'est donner, pour chaque x_i que peut prendre X, la probabilité de l'événement {X = x_i }, notée P(X = x_i).

Exemple :
Dans l'exemple précédent, l'événement {X = 7} est réalisé par une seule issue. Sa probabilité vaut P(X=7)= $\frac{1}{6}$.
De même, l'événement {X = 10} est réalisé par une seule issue. Sa probabilité vaut P(X=10)= $\frac{1}{6}$.
L'événement {X = -5} est réalisé par 4 issues. Sa probabilité vaut P(X=-5)= $\frac{4}{6}$.= $\frac{2}{3}$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est résumée dans le tableau ci-dessous :

x_i	-5	7	10
P(X = x_i)	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Remarque : Pour une variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$, on a toujours :
$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + ... + P(X = x_n) = 1$$

Méthode et exemple pour déterminer une loi de probabilité :

Méthode :

Pour déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire, on procède en 3 étapes :

1) On trouve toutes les valeurs que peut prendre X.
2) On détermine les probabilités correspondant à ces valeurs
3) On résume ces calculs dans un tableau.

x_i	x_1	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	...	p_n

Exemple :

Soit l'expérience aléatoire : "On tire une carte dans un jeu de 32 cartes."

On considère le jeu suivant : Si on tire un cœur, on gagne 2€.
Si on tire un roi, on gagne 5€.
Si on tire une autre carte, on perd 1€.

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.
Déterminer la loi de probabilité de X.

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 2, 5, -1 mais aussi 7.
En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne 5(roi) + 2(cœur) = 7€.

- Si la carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), X = 2. $P(X = 2) = \frac{7}{32}$.

- Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur), X = 5. $P(X = 5) = \frac{3}{32}$.

- Si la carte tirée est le roi de cœur, X = 7. $P(X = 7) = \frac{1}{32}$.

- Si la carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, X = -1. $P(X = -1) = \frac{21}{32}$.

La loi de probabilité de X est :

x_i	-1	2	5	7
$P(X = x_i)$	$\frac{21}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$

On peut constater que : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{21}{32} + \frac{7}{32} + \frac{3}{32} + \frac{1}{32} = 1$

2) ESPÉRANCE, VARIANCE ET ÉCART-TYPE

Dans cette partie, on considère une variable X défini sur un univers Ω fini et dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	x_1	...	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	...	p_n

a. Espérance

A visionner : https://www.youtube.com/embed/9_7fnrQeatw?vq

Définition :
L'**espérance** de X est le nombre réel noté E(X), définie par : $E(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$
On peut noter aussi : $E(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Remarque :
L'espérance s'interprète comme la moyenne des valeurs prises par X lorsque l'on répète un grand nombre de fois l'expérience.

Exemple :
Dans le jeu de la « méthode » dans le paragraphe précédent :

$$E(X) = \frac{21}{32}\times(-1)+\frac{7}{32}\times 2+\frac{3}{32}\times 5+\frac{1}{32}\times 7 = \frac{15}{32}.$$

L'espérance est égale à $\frac{15}{32} \approx 0,5$ signifie qu'en jouant, on peut espérer gagner environ 0,50€.

b. Variance et écart-type

A visionner : https://www.youtube.com/embed/EGG_rixzgS4?vq

Définitions :
La **variance** de X est le réel positif, noté V(X), défini par :

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \ldots + p_n(x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2$$

L'**écart-type** de X est le nombre positif, noté $\sigma(X)$, définie par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque :
V(X) et $\sigma(X)$ sont des indicateurs de **dispersion** des valeurs de X autour de E(X).
Plus la variance et l'écart-type sont grands, plus les valeurs sont dispersées autour de l'espérance.

Exemple :
Dans le jeu de la « méthode » dans le paragraphe précédent :

$$V(X) = \frac{21}{32}\times\left(-1-\frac{15}{32}\right)^2+\frac{7}{32}\times\left(2-\frac{15}{32}\right)^2+\frac{3}{32}\times\left(5-\frac{15}{32}\right)^2+\frac{1}{32}\times\left(7-\frac{15}{32}\right)^2 \approx 5,1865$$

$$\sigma(X) \approx \sqrt{5,1865} \approx 2,28.$$

Un écart-type environ égal à 2,28 signifie qu'avec une espérance proche de 0,50 le risque de perdre de l'argent est important.

Pour les curieux, tuto pour calculer E(X), V(X) et $\sigma(X)$à la calculatrice :
https://www.youtube.com/embed/Z3rd-INoLtE?vq