Chapitre 11. Primitive et Équation Différentielle

Boulanger Yann

23 août 2025

Table des matières

1 Primitive

1.1 Définition

Définition 1
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I quelconque.
On dit que $F : I \to \mathbb{R}$ est une **primitive** de f sur I si F est une fonction dérivable sur I vérifiant $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Remarque 1
Deux fonctions différentes peuvent avoir la même dérivée, de facto une primitive d'une fonction n'est pas unique. Pour l'être, une condition initiale est nécessaire.

Propriété 1
Soient f une fonction continue sur I et F une fonction définie et dérivable sur I,
si pour tout $x \in I$ on a $F'(x) = f(x)$, alors F est une primitive de f sur I.

Exemple 1
Soient $f(x) = 2x$ et $F(x) = x^2 + 5$. On a $F'(x) = 2x + 0 = 2x = f(x)$, donc F est une primitive de f.

Proposition 1
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ qui admet une primitive $F_0 : I \to \mathbb{R}$.
Alors, les primitives de f sur I sont toutes de la forme $x \to F_0(x) + k, k \in \mathbb{R}$.
Si la fonction f est à valeurs réelles, les primitives (à valeurs réelles) sont définies à une constante réelle près.

Proposition 2
Soient F une primitive de f et G une primitive de g.
Alors on a :

— $F + G$ est une primitive de $f + g$;

— pour $\lambda \in \mathbb{R}$, λF est une primitive de λf

Exemple 2
L'ensemble des primitives réelles de $f : x \to x^3 - 1$ est $\{x \to \frac{x^4}{4} - x + k, k \in \mathbb{R}\}$.

1.2 Calculs de Primitives

1.2.1 Primitives des fonctions de référence

$f(x)$	$F(x)$	I
m (constante)	$mx + k$	$\mathbb{R}$
x	$\dfrac{x^2}{2} + k$	$\mathbb{R}$
$x^n,\ n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\begin{cases}]-\infty, 0[\text{ ou }]0, +\infty[& \text{si } n \leq -2, \\ \mathbb{R} & \text{sinon} \end{cases}$
$\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{1}{x} + k$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$]0, +\infty[$
$\cos(x)$	$\sin(x) + k$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + k$	$\mathbb{R}$
e^x	$e^x + k$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(x) + k$	$]0, +\infty[$

1.2.2 Fonctions composées

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

$f(x)$	$F(x)$	Conditions
$u'(x)\, u(x)^n, \quad n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$	$\dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1} + k$	$\begin{cases} u(x) \neq 0 & \text{si } n \leq -2 \end{cases}$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + k$	$u(x) > 0$ sur I
$\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$	$-\dfrac{1}{u(x)} + k$	$u(x) \neq 0$ sur I
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + k$	aucune
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u(x)) + k$	$u(x) > 0$ sur I

Proposition 3
Si v est une fonction dérivable sur un intervalle J et u une fonction dérivable sur un intervalle I, telle que pour tout $x \in I$, $u(x) \in J$, alors la fonction $(v' \circ u)\, u'$ admet pour primitive sur I la fonction $v \circ u$.

1.2.3 Exemples 3

— Sur $\mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ alors $F(x) = \dfrac{x^5}{5}$.

— Sur $]0; +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ alors $F(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$.
On peut aussi écrire $f(x) = x^{-3}$, en généralisant la formule de x^n avec $n \in \mathbb{Z}$:

$$F(x) = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}.$$

— Polynôme : $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$, alors

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - x.$$

— Forme $u'u^n$
  — $f(x) = 2x(x^2-1)^3$, alors $F(x) = \dfrac{(x^2-1)^4}{4}$.
  — $f(x) = (3x-1)^4 = \dfrac{1}{3}\big[3(3x-1)^4\big]$, alors $F(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{(3x-1)^5}{5} = \dfrac{(3x-1)^5}{15}$.

— Forme $\dfrac{u'}{u}$
  — $f(x) = \dfrac{2}{2x-3}$, alors $F(x) = \ln|2x-3|$.
  — $f(x) = \dfrac{1}{4x+1} = \dfrac{1}{4}\Big[\dfrac{4}{4x+1}\Big]$, alors $F(x) = \dfrac{1}{4}\ln|4x+1|$.

— Forme $\dfrac{u'}{u^n}$, $n > 2$
  — $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x-3)^2} = \dfrac{1}{2}\Big[\dfrac{2x+2}{(x^2+2x-3)^2}\Big]$,
  alors $F(x) = -\dfrac{1}{2(x^2+2x-3)}$.

— Forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$
  — $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$, alors $F(x) = 2\sqrt{x+4}$.
  — $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{3}{2}\Big[\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}}\Big]$, alors $F(x) = \dfrac{3}{2} \cdot 2\sqrt{2x+1} = 3\sqrt{2x+1}$.

— Forme $u'e^u$
  — $f(x) = e^{4x+1} = \dfrac{1}{4}\big[4e^{4x+1}\big]$, alors $F(x) = \dfrac{1}{4}e^{4x+1}$.
  — $f(x) = xe^{-x^2+3} = -\dfrac{1}{2}\big[-2xe^{-x^2+3}\big]$, alors $F(x) = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2+3}$.

Remarques 2

— Bien adapter le coefficient lorsque cela est nécessaire pour une forme donnée.

— Trouver la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours facile. Si l'on ne peut faire apparaître les fonctions u et u', on peut être amené à faire une décomposition en éléments simples ou un changement de variable.

2 Équation Différentielle

2.1 Définitions

Définition 2 - Équation différentielle

— Une équation différentielle d'ordre n est une équation de la forme

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{E}$$

où F est une fonction de $(n+2)$ variables.

— Une solution d'une telle équation sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ qui est n fois dérivable et qui vérifie l'équation (E).

Remarques 3

— De coutume pour les équations différentielles on note y au lieu de $y(x)$, y' au lieu $y'(x)$. On note donc $y' = \sin x$, ce qui signifie $y'(x) = \sin x$.

— Il faut s'habituer au changement de nom pour les fonctions et les variables. Par exemple $(x'')^3 + t(x')^3 + (\sin t)x^4 = e^t$ est une équation différentielle d'ordre 2, dont l'inconnue est une fonction x qui dépend de la variable t. On cherche donc une fonction $x(t)$, deux fois dérivable, qui vérifie $(x''(t))^3 + t(x'(t))^3 + (\sin t)(x(t))^4 = e^t$.

— Rechercher une primitive, c'est déjà résoudre l'équation différentielle $y' = f(x)$.

— Si aucune précision n'est donnée sur l'intervalle I, on considérera qu'il s'agit de $I = \mathbb{R}$.

Définition 3 - Équation différentielle linéaire

— Une équation différentielle d'ordre n est **linéaire** si elle est de la forme

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = g(x)$$

où les a_i et g sont des fonctions réelles continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

Définitions 4

— Une équation différentielle linéaire est **homogène**, ou sans second membre, si la fonction g ci-dessus est la fonction nulle :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = 0$$

— Une équation différentielle linéaire est **à coefficients constants** si les fonctions a_i ci-dessus sont constantes :

$$a_0y + a_1y' + \dots + a_ny^{(n)} = g(x)$$

où les a_i sont des constantes réelles et g une fonction continue.

Exemples 4

— $y' + 5xy = e^x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.

— $y' + 5xy = 0$ est l'équation différentielle homogène associée à la précédente.

— $2y'' - 3y' + 5y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre.

— $y'^2 - y = x$ ou $y'' \cdot y' - y = 0$ ne sont pas des équations différentielles linéaires.

2.2 Équation Différentielle linéaire d'ordre 1

Définition 5
Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation du type :

$$y' = a(x)y + b(x) \tag{E}$$

où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

2.2.1 Équation différentielle $y' = ay$

Théorème 1
Les équations différentielles de la forme $y' = ay$ où a est un réel non nul ont pour solutions les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$, avec C réel.

Remarque 4
Pour x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution de l'équation différentielle $y' = ay$ prenant la valeur y_0 en x_0, c'est-à-dire vérifiant la « condition initiale » $f(x_0) = y_0$.

Exemple 5
On considère l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$.

1. Déterminer la solution générale de cette équation.
2. Déterminer l'unique solution telle que $y(1) = 2$.

Solution

1. $3y' + 5y = 0 \iff y' = -\frac{5}{3}y$ alors ici $a = -\frac{5}{3}$.
   La solution générale est donc : $y(x) = Ce^{-\frac{5}{3}x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
2. $y(1) = 2$ nous donne $Ce^{-\frac{5}{3}} = 2$ alors $C = 2e^{\frac{5}{3}}$ et par conséquent l'unique solution recherchée est $y(x) = 2e^{\frac{5}{3}}e^{-\frac{5}{3}x} = 2e^{-\frac{5}{3}x+\frac{5}{3}}$.

Équation différentielle $y' = ay + b$

Théorème 2
Les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$ où a est un réel non nul et b un réel ont pour solutions les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, avec C réel.

Remarque 5
Pour x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe une unique fonction f solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ prenant la valeur y_0 en x_0, c'est-à-dire vérifiant la « condition initiale » $f(x_0) = y_0$.

Exemple 6
On considère l'équation différentielle $y' = 3y - 2$.

1. Déterminer la solution particulière constante de cette équation.
2. Déterminer la forme générale des solutions de l'équation.

Solution

1. Ici $a = 3$ et $b = -2$ alors la solution particulière constante est $\frac{2}{3}$.
2. Nous avons alors la solution générale suivante : $C \in \mathbb{R}, y(x) = Ce^{3x} + \frac{2}{3}$.

2.2.2 Équation différentielle $y' = ay + f$

Théorème 3
Soit a un réel et f une fonction définie sur un intervalle I.
Étant donnée une solution particulière y_0 de l'équation différentielle $y' = ay + f$, les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $x \longmapsto Ce^{ax} + y_0(x)$, avec $C \in \mathbb{R}$.
Exemple 7
On considère l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est solution de l'équation.
2. En déduire la forme générale de toutes les solutions de l'équation.

Solution

1. $y' - 2y = -x - \frac{1}{2} - +x^2 + x + \frac{1}{2} = x^2$, $u(x)$ est bien une solution de l'équation.
2. La forme générale est alors : $y(x) = Ce^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

Fin de chapitre