Chapitre 10 – PRODUIT SCALAIRE

1) PODUIT SCALAIRE DANS LE PLAN

a) Définition du produit scalaire

Définition :

Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

La **norme du vecteur** $\vec{u}$,notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel définit par :

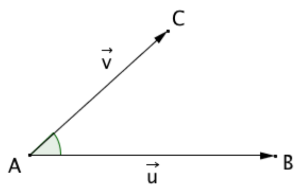
- $\vec{u}.\vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$, dans le cas contraire.

$\vec{u}.\vec{v}$ se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$".

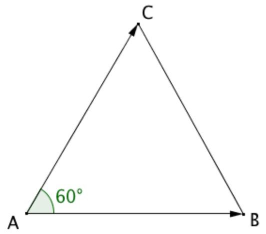
Remarques :

- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :

$$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$$



Exemple :



Soit un triangle équilatéral ABC de côté a.

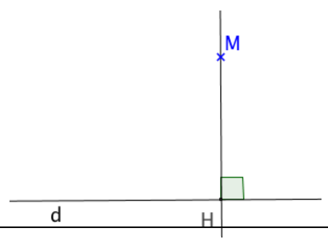
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} = a \times a \times \cos(60°) = \frac{a^2}{2}$$

b) Projection orthogonale et vecteurs orthogonaux.

Définition

Soit une droite d et un point M du plan.

Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite d est le point d'intersection H de la droite d avec la perpendiculaire à d passant par M.



Définition

On dit que deux vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux lorsque les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

Propriété

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

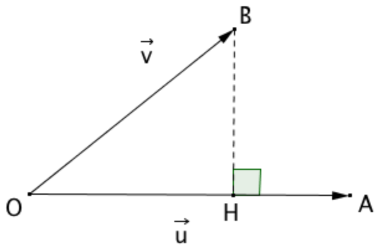
<u>Démonstration :</u>
Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.
Supposons les vecteurs non nuls.
$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

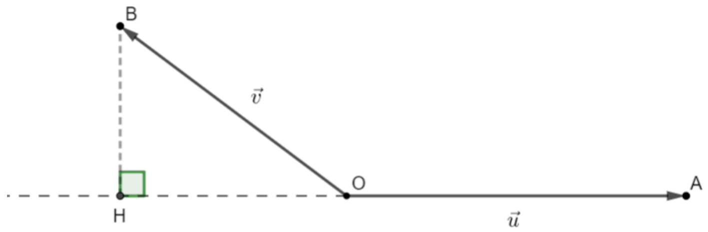
Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$

H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).

On a : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = \begin{cases} OA \times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de même sens} \\ -OA \times OH \text{ si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont de sens contraires} \end{cases}$



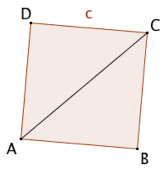


Démonstration : « faite dans l'activité » (activité 2 p 211 hyperbole)

Exemple :

Soit un carré ABCD de côté c.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = c^2$



2) PROPRIETES DU PRODUIT SCALAIRE

a) Symétrie et bilinéarité du produit scalaire

Propriété– Symétrie du produit scalaire

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.

Démonstration :

On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls (démonstration évidente dans la cas contraire).

$\vec{v}.\vec{u} = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{v},\vec{u}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(-(\vec{u},\vec{v})) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) = \vec{u}.\vec{v}$.

Propriété– Bilinéarité du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u}$ et $\vec{w}$, on a :

1) $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ 2) $\vec{u}.(k\vec{v}) = k.(\vec{u}.\vec{v})$, avec k un nombre réel.

Démonstration :

Le point 1 est admis.

Pour le point 2, on suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls (démonstration évidente dans la cas contraire).

$\vec{u}.(k\vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|k\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},k\vec{v}) = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times k\|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) \text{ si } k > 0 \\ \|\vec{u}\| \times (-k)\|\vec{v}\| \times (-\cos(\vec{u},\vec{v})) \text{ si } k < 0 \end{cases}$

Alors $\forall k \in \mathbb{R}$, $\vec{u}.(k\vec{v}) = k \times (\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u},\vec{v})) = k.(\vec{u}.\vec{v})$.

b) Produit scalaire dans un repère orthonormé.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\binom{x}{y}$ et $\binom{x'}{y'}$.

On a : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$**.**

Démonstration :
$\vec{u}.\vec{v} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}) = xx'\vec{\imath}.\vec{\imath} + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + yx'\,\vec{\jmath}.\vec{\imath} + yy'\vec{\jmath}.\vec{\jmath}$
$= xx'\|\vec{\imath}\|^2 + xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath} + yx'\,\vec{\jmath}.\vec{\imath} + yy'\|\vec{\jmath}\|^2 = xx' + yy'$
Car $\|\vec{\imath}\|^2 = \|j\|^2 = 1$, le repère étant normé, et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{\imath} = 0$ le repère étant orthogonal.

Exemple :
Soit $\vec{u}\binom{5}{-4}$ et $\vec{v}\binom{-3}{7}$ deux vecteurs. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$.

$\vec{u}.\vec{v} = 5 \times (-3) + (-4) \times 7 = -15 - 28 = -43$

Propriété

Soit le vecteur $\vec{u}\binom{x}{y}$

Alors : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Démonstration :
$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$
D'après la propriété précédente $\|\vec{u}\| = \sqrt{xx + yy}$
D'où $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exemple :
Soit $\vec{u}\binom{5}{-4}$ un vecteur. Calculer $\|\vec{u}\|$.
$\|\vec{u}\| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{25 + 16}$
$\|\vec{u}\| = \sqrt{41}$

Propriété – Critère d'orthogonalité

Soient les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$:

Alors dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à dire que $xx' + yy' = 0$.

Démonstration :
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$
Donc $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' = 0$

Exemple :
Soit $\vec{u}\binom{1}{2}$ et $\vec{v}\binom{4}{-2}$ deux vecteurs dans une base orthonormée (O, $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).
Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

$xx' + yy' = 1 \times 4 + 2 \times (-2) = 4 - 4 = 0$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.